V. Drinčić

# RAČUNSKE VEŽBE
# IZ
# FIZIKE

Beograd, 2010

AUTOR:
mr Vesna Drinčić, diplomirani fizičar, predavač strukovnih studija

RAČUNSKE VEŽBE IZ FIZIKE

skripta

RECENZENTI:
mr Biljana Nikolić, diplomirani fizičar
mr Branislava Brkić, diplomirani fizičar

IZDAVAČ:
autorsko izdanje

ŠTAMPA:
¨Student¨, Beograd

TIRAŽ: 50 primeraka

## *Nekoliko reči o zadacima*

Da bi uspeh bio u srazmeri sa utrošenim vremenom, rešavanje zadataka ne bi trebalo posmatrati kao zamenjivanje simbola brojevima ili slaganje delova slike u celinu, kao u nekim rebusima. Prelistavanje knjige dok se ne nađe obrazac koji izgleda da može da se upotrebi, ili neki izrađeni primer koji liči na zadatak, jeste rasipanje vremena i snage. Zadaci imaju svrhu da vam omoguće da ustanovite da li razumete određeno gradivo pošto ste čuli predavanje i proučili tekst udžbenika. Učite pre nego što se prihvatite zadataka. Nemoguće je očekivati da će se rešavanjem određenog broja zadataka pokriti svaka važna činjenica. Izgubićete mnogo ako čitate samo toliko da biste mogli da *radite svoje* zadatke.

Svaki zadatak sadrži u sebi jedan ili više opštih fizičkih zakona ili definicija. Pošto ste pročitali zadatak, zapitajte se koji su to zakoni i definicije i budite sigurni da ih znate. To znači da treba da ste u mogućnosti da ih sebi formulišete jasno i eksplicitno i da ne treba da se zadovoljite ugodnim osećanjem da *razumete* drugi Njutnov zakon iako ga ne možete formulisati svojim rečima.

Jedan od najboljih načina da ustanovite da li razumete zakone koji se koriste u određenom zadatku jeste da izradite zadatak u obrnutom smeru. Ako zadatak daje $x$ a traži da izračunate $y$, onda načinite zadatak u kojem je dato $y$ a traži se $x$. Drugi postupak je da se zapitate kako bi se rezultat promenio ako bi dati uslovi bili nešto drugačiji.

Francis Weston Sears

## *Plan rešavanja zadataka*

1. Pažljivo pročitati zadatak i više puta.
2. Pri čitanju zapisati svaki podatak iz zadatka koristeći oznake za fizičku veličinu, brojnu vrednost i jedinicu. Pri tome grupisati poznate i nepoznate veličine.
3. Nacrati odgovarajuću sliku. Na slici označiti sve poznate fizičke veličine i neke dopunske, koje se uklapaju u smisao zadatka, pomoću njihovih opštih oznaka.
4. Utvrditi koja fizička pojava leži u osnovi zadatke i koji fizički zakoni je objašnjavaju.
5. Rešavati zadatak u opštem obliku da bi se dobio konačan izraz.
6. Sve jedinice u kojima su date vrednosti fizičkih veličina pretvoriti u jedinice SI sistema. Osloboditi se prefiksa iz oznake za jedinicu. Svesti sve jedinice na osnovne u SI sistemu.
7. Zameniti vrednosti datih fizičkih veličina u konačni izraz i izvršiti izračunavanje. Istovremeno sređivati jedinice.
8. Oceniti vrednost dobijenog rezultata. Videti ima li fizičkog smisla, kako za dobijenu brojnu vrednost, tako i za dobijenu jedinicu.

## *Sadržaj*

# 1. Sistemi jedinica i izražavanje rezultata

1.1. 0,0000012 mm = $1{,}2\cdot10^{-6}$ mm = $1{,}2\cdot10^{-6}\cdot10^{-3}$ m = $1{,}2\cdot10^{-9}$ m.

1.2. 150000000 km = $1{,}5\cdot10^{8}$ km = $1{,}5\cdot10^{8}\cdot10^{3}$ m = $1{,}5\cdot10^{11}$ m.

1.3. Koliki je red veličine masa $m_1$ = 0,003 g i $m_2$ = 4 t , izraženih u kilogramima?

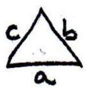
✍ $$m_1 = 0{,}003\,\mathrm{g} = 3{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{g} = 3{,}0\cdot10^{-3}\cdot10^{-3}\,\mathrm{kg} = 3{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg}$$
$$m_2 = 4\mathrm{t} = 4{,}0\cdot10^{3}\,\mathrm{kg}$$

Red veličine za $m_1$ je $10^{-6}$, a za $m_2$ je $10^{4}$ jer je 4,0 › 3,16. Postoji pravilo: ako ispred umnoška broja 10 stoji broj koji je veći od $\sqrt{10} = 3{,}16$, red veličine postaje 10 puta veći.

1.4. Koliki je obim vrta u obliku trougla, ako su mu stranice dužine:10 m, 6,5 m i 5,2 m.

✍

a=10m
b=6,5m
c=5,2m
O=?




O=a+b+c

Sve podatke moramo izraziti brojem koji ima onoliko decimalnih mesta koliko ih ima podatak sa najmanjim brojem decimalnih mesta i tek onda vršiti sabiranje.

10 m + 6,5 m + 5,2 m = 10 m + 6 m + 5 m = 21m ili

10 m + 6,5 m + 5,2 m = 10 m + 7 m + 5 m = 22m

(1 ili 2 se dobija na mestu prve nesigurne cifre zavisno od načina zaokruživanja broja sa cifrom 5; pravilo je da se 5 zaokružuje na paran broj, pa prema tome, prvi rezultat je prihvatljiviji).

1.5. Oduzeti 532 g i 156 g od 5,0 kg.

✍ 5,0 kg – 0,532 kg – 0,156 kg = 5,0 kg – 0,5 kg – 0,2 kg = 4,3 kg

Pri množenju i deljenju, ne sme rezultat imati ukupno više cifara, nego što ih ima onaj od brojeva koji učestvuje u operaciji, kome je broj pouzdanih mesta najmanji.

1.6. Izračunati: a) 4,8 · 2,11; b) 0,03 · 204.

✍ a) Prvi činilac u proizvodu ima 2 cifre, a drugi 3 cifre. Proizvod ne sme imati više od dve cifre: $\underline{4{,}8}\cdot 2{,}11 = 10{,}128 = \underline{10}$ (podvučen je broj koji definiše koliko cifara će imati rezultat)

b) $204\cdot0{,}0\underline{3} = 6{,}12 = \underline{6}$

1.7. Podeliti: a) 12,48 i 0,312; b) 4,53 i 2,0.

✍ $12{,}48 : 0{,}\underline{312} = 12480 : 312 = \underline{40{,}0}$

$4{,}53 : \underline{2{,}0} = 45{,}3 : 20 = 2{,}26 = \underline{2{,}3}$.

1.8. Srednja udaljenost Zemlje od Sunca je 150 miliona kilometra. Kolika je ta udaljenost izražena preko faktora koji predstavlja stepen broja 10 u: a) km; b) m?

✍ a) $1{,}5\cdot 10^{8}$ km, b) $1{,}5\cdot 10^{11}$ m jer

$$d = 150.000.000\ km$$

$$d = 1{,}5\cdot 10^{8}\ km$$

$$d = 1{,}5\cdot 10^{8}\ km = 1{,}5\cdot 10^{8}\cdot 10^{3}\ m = 1{,}5\cdot 10^{11}\ m$$

1.9. Talasna dužina helijumove plave spektralne linije je $4{,}471\cdot 10^{-4}$ mm. Izrazi taj podatak u cm i m.

✍

$$\lambda = 4{,}471\cdot 10^{-4}\ mm$$

$$\lambda = 4{,}471\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-3}\ m = 4{,}471\cdot 10^{-7}\ m$$

$$\lambda = 4{,}471\cdot 10^{-7}\ m = 4{,}471\cdot 10^{-5}\cdot \underline{10^{-2}\ m} = 4{,}471\cdot 10^{-5}\ cm$$

1.10. Kojeg je reda veličine vremenski interval od godine dana, izražen u sekundama?

✍ $365\ d = 365\cdot 24\ h = 365\cdot 24\cdot 60\ min = 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ s = 365\cdot 24\cdot 3600\ s \cong 400\cdot 20\cdot 4000\ s = 4{,}00\cdot 10^{2}\cdot 2{,}0\cdot 10^{1}\cdot 4{,}000\cdot 10^{3}\ s = 32\cdot 10^{6}\ s = 3{,}2\cdot 10^{7}\ s$

pa je red veličine $10^{7}$ s.

1.11. Koliki je red veličine mase elektrona u SI?

✍ $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ kg = 0{,}9\cdot 10^{-30}\ kg \Rightarrow$ red veličine je 30

1.12. Sabrati podatke, koristeći pravilo o broju cifra pri sabiranju:
18,425 cm, 7,21 cm i 5,0 cm.

✍(30,6 cm) jer

$$\begin{array}{r} 18{,}425\ cm \\ 7{,}21/\ cm \\ 5{,}0//\ cm \\ \hline 30{,}6//\ cm \end{array}$$

$$= 30{,}6\ cm$$

1.13. Koliko će pouzdanih mesta imati zbir sledećih vrednosti: 70,3 cm, 7mm i 0,66 mm?

✍ (711 mm) jer

$$70{,}3\ cm + 7\ mm + 0{,}66\ mm =$$

$$= 70{,}3\cdot 10\ mm + 7\ mm + 0{,}66\ mm =$$

$$= 703\ mm + 7\ mm + 1\ mm = 711\ mm$$

1.14. Saberi vrednost, pazeći na značajne cifre: 12 m, 20 dm i 16 dm.

✍ (16 m) jer

$$12m + 20dm + 16\,dm = 12m + 20\cdot10^{-1}m + 16\cdot10^{-1}m =$$
$$= 12m + 2{,}0m + 1{,}6m = 12m + 2m + 2m = 16m$$

1.15. Oduzmi 0.2 kg od 34 kg, vodeći računa o pouzdanim ciframa.

✍ (34 kg) jer

$$34\,kg - 0{,}2\,kg \Rightarrow \begin{array}{r} 34\_ \\ -\ 0{,}2 \\ \hline 34\_ \end{array} \qquad 34\,kg - 0{,}2\,kg = 34\,kg$$

1.16. Pomnoži brojeve, vodeći računa o pouzdanim ciframa a) 2,21·0,3; b) 2,02·4,113.

✍ a) 0,7 ; b) 8,31 jer

$$2{,}21\cdot0{,}3 = 0{,}663 = 0{,}7$$
$$2{,}02\cdot4{,}113 = 8{,}30826 = 8{,}31$$

1.17. Podeli brojeve : 14,28 i 0,714.

✍ (20,0) jer

$$14{,}28 : 0{,}714 = 20{,}0$$
$$\frac{14{,}28}{0{,}714} = \frac{1428}{71{,}4} = \frac{14280}{714} = 20 = 20{,}0$$

1.18. Koliki su rezultati ovih operacija, vodeći računa o pouzdanim ciframa
a) 0,032:0,0040; b) 97,52 :2,54 ?

✍ a) 8,0; b) 38,4 jer

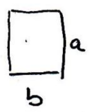
$$\frac{0{,}032}{0{,}0040} = \frac{32}{4{,}0} = 8{,}0 \qquad \frac{97{,}52}{2{,}54} = \frac{9752}{254} = 38{,}393701 = 38{,}4$$

1.19. Izmerene su dimenzije lista papira: *a* = 208 mm i *b* = 15 cm. Koliki su obim i površina lista?

✍ $O$ = 72 cm ; $S = 3{,}1\cdot10^2$ cm$^2$ jer

$a = 208$ mm
$b = 15$ cm

$O = ?\quad P = ?$




$$O = (a+b)2 = 2\cdot(20{,}8+15)cm = 71{,}6\,cm = 72cm$$
$$P = a\cdot b = 20{,}8cm\cdot\underbrace{15}cm = \underbrace{31}2\,cm^2 \Rightarrow$$

$a = 208$ mm
$b = 15\cdot10$ mm

ili

$a = 20{,}8$ cm
$b = 15$ cm

$$P = 3{,}12\cdot10^2cm^2 = 3{,}1\cdot10^2cm^2$$

ili

$$P = 20{,}8cm\cdot15cm = 21cm\cdot15cm = 315cm^2$$
$$= 315cm^2 = 3{,}15\cdot10^2cm^2 = 3{,}2\cdot10^2cm$$

1.20. Dužinu od 5 m izraziti u decimetrima, centimetrima i milimetrima.

✍ 5 m = 50 dm = 500 cm = 5000 mm jer

$dm = 10^{-1}m$
$cm = 10^{-2}m$
$mm = 10^{-3}m$

pa je

$1m = 10^{1}dm$
$1m = 10^{2}cm$
$1m = 10^{3}mm$

1.21. Dužinu od 10 mm izraziti u centimetrima, decimetrima i metrima.

✍ 10 mm = 1cm = 0,1 dm = 0,01 m.

1.22. Izraziti u metrima dužine od 150 cm, 4 km, 5 mm i 48 dm.

✍ $150\cdot 10^{-2}$ m $=1{,}5$ m; $4\cdot 10^{3}$ m $=4000$ m; $5\cdot 10^{-3}$ m $=0{,}005$ m; $48\cdot 10^{-1}$ m $=4{,}8$ m

1.23. Dužinu od jednog metra pet centimetara i tri milimetra izraziti u milimetrima.

✍ 1053 mm

1.24. Koliko kvadratnih metara ima površina zemljišta u obliku kvadrata, čije stranice imaju dužine 1 km?

✍ $S = a^2 = (1\ \text{km})^2 = (10^3\ \text{m})^2 = 1\cdot 10^6\ \text{m}^2$.

1.25. Stranice pravougaonika iznose: a = 28 cm i b = 74 cm. Kolika je površina pravougaonika izražena u kvadratnim metrima?

✍ $S = a\cdot b = 2072\ \text{cm}^2 = 2072\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 0{,}21\ \text{m}^2$

1.26. Izraziti u kvadratnim metrima površine od:
a) 3000 mm$^2$, b) 1500 cm$^2$, c) 0,03 km$^2$, d) 60 dm$^2$.

✍ $(1\text{m})^2 = (10^3\ \text{mm})^2 = 10^6\ \text{mm}^2$; $1\ \text{mm}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$
a) $3000\ \text{mm}^2 = 3000\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2 = 0{,}003000\ \text{m}^2$ ;
$(1\ \text{m})^2 = (10^2\ \text{cm})^2 = 10^4\ \text{cm}^2$; $1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$
b) $1500\ \text{cm}^2 = 1500\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 0{,}1500\ \text{m}^2$;
c) $0{,}03\ \text{km}^2 = 0{,}03\ (10^3\ \text{m})^2 = 0{,}03\cdot 10^6\ \text{m}^2 = 0{,}03\cdot 10^4\ \text{m}^2 = 3\cdot 10^4\ \text{m}^2$;
d) $60\ \text{dm}^2 = 60\ (10^{-1}\ \text{m})^2 = 60\cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 = 0{,}60\ \text{m}^2$.

1.27. Koliko kubnih milimetara ima u kubnom metru?

✍ $(1\ \text{m})^3 = (10^3\ \text{mm})^3 = 1\cdot 10^9\ \text{mm}^3$

1.28. Odrediti težinu 1 kg hleba.

✍ $G = m\cdot g = 1\text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81$ N.

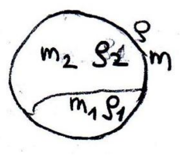
1.29. Koliko iznosi: 1μs$^{-1}$, 1Gg, $5\cdot 10^6$ kg, 1μg?

1.30. Lopta od smeše zlata i srebra sa gustinom $\rho$ ima masu $m$. Koliki je procenat srebra u smeši? Kolika je masa srebra u lopti? $m$ = 400 g; $\rho = 1{,}6\cdot 10^4$ kg/m$^3$.

✍

$\rho$ , $\rho = 1{,}6\cdot 10^4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$m$ , $m = 400\text{g}$
$x = ?$
$m_2 = ?$

iz tablica: $\rho_1 = 1{,}93\cdot 10^4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\rho_2 = 1{,}05\cdot 10^4\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



$m=\rho V \qquad V=V_1+V_2$

$m_1=\rho_1 V_1 \qquad m=m_1+m_2$

$m_2=\rho_2 V_2 \qquad \rho V=\rho_1 V_1+\rho_2 V_2$

$V_1=V-V_2$

$\rho V=\rho_1(V-V_2)+\rho_2 V_2$

$\rho V=\rho_1 V-\rho_1 V_2+\rho_2 V_2$

$\rho V-\rho_1 V=\rho_2 V_2-\rho_1 V_2=(\rho_2-\rho_1)V_2$

$$V_2=\frac{\rho V-\rho_1 V}{\rho_2-\rho_1}$$

$$m_2=\rho_2 V_2=\rho_2\frac{\rho V-\rho_1 V}{\rho_2-\rho_1}$$

$$m_2=\rho_2\frac{(\rho-\rho_1)V}{\rho_2-\rho_1}=\rho_2\frac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}\cdot\frac{m}{\rho}$$

$$m_2=\frac{1{,}05\cdot10^4\frac{kg}{m^3}\cdot\left(1{,}6\cdot10^4\frac{kg}{m^3}-1{,}93\cdot10^4\frac{kg}{m^3}\right)\cdot 400\ g}{\left(1{,}05\cdot10^4\frac{kg}{m^3}-1{,}93\cdot10^4\frac{kg}{m^3}\right)\cdot1{,}6\cdot10^4\frac{kg}{m^3}}$$

$m_2=0{,}098\ kg$

$$X=\frac{m_2}{m}\cdot100\%$$

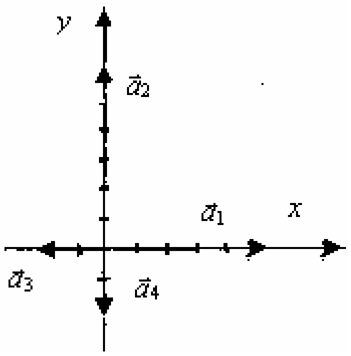
$$X=\frac{0{,}098\ kg}{0{,}400\ kg}\cdot100\%=24{,}5\%$$

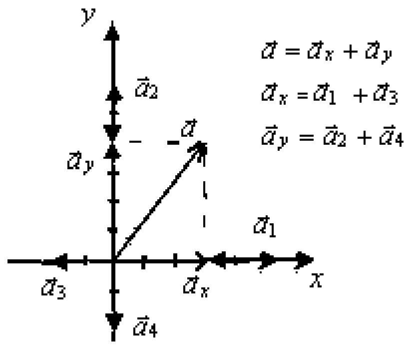
odgovor: $m_2=\dfrac{(\rho_1-\rho)\rho_2 m}{(\rho_1-\rho_2)\rho}=0{,}098$ kg $\qquad X=\dfrac{m_2}{m}100\%=24{,}5\%$

## 2. Skalari i vektori

2.1. Odrediti rezultantu četiri vektora čiji su intenziteti, pravci i smerovi prikazani na slici.

✍




Vektore možemo sabrati tražeći najpre rezultante vektora $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_3$, koji su istih pravaca i vektora $\vec{a}_2$ i $\vec{a}_4$, takođe istih pravaca, a potom treba sabrati dobijene rezultate $\vec{a}_x$ i $\vec{a}_y$, metodom paralelograma ili nadovezivanjem. $\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y$. Primenom Pitagorine teoreme je:

$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Rezultujući vektor ima intenzitet 5 jediničnih vrednosti.

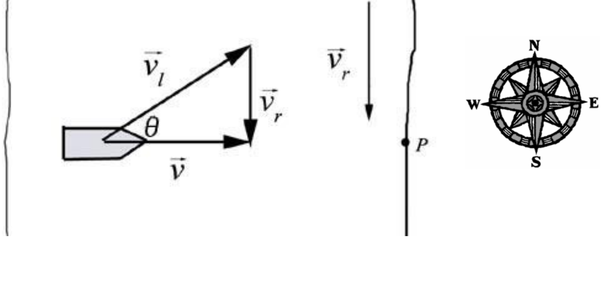
2.2. Pretpostavimo da lađom treba da pređemo reku u pravcu istoka. Reka teče brzinom od $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$ u pravcu juga. Ako lađar može da razvije brzinu od 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, odrediti brzinu lađe u odnosu na obalu i pravac kretanja lađe, tako da lađa stigne u pristanište na drugoj obali (tačka P).

$v_r=6\frac{km}{h}$, jug

$v=10\frac{km}{h}$, istok

---

$v_l=?$

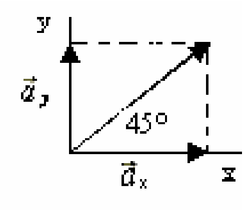


✍ Pravac kretanja lađe određen je uglom $\theta$, čija se vrednost može dobiti trigonometrijskom funkcijom, $\sin\theta = \frac{6}{10} = 0{,}6 \Rightarrow \theta = \arcsin 0{,}6 = 37°$. Slaganjem brzina lađe u odnosu na vodu i brzine same vode dobijamo rezultujuću brzinu lađe $v$ u odnosu na obalu. Dakle,

$$v = \sqrt{v_l^2 - v_r^2} = \sqrt{10^2 - 6^2}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

2.3. Vektor $\vec{a}$ zaklapa ugao 45˚ sa $x$-osom. Kolike su njegove komponente u pravcu koordinatnih osa?

✍




$\cos 45° = 0{,}707$

$a_x^2 + a_y^2 = a^2$ ; $a_x = a_y$

$2a_x^2 = a^2$

$a_x = a\frac{1}{\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

ili

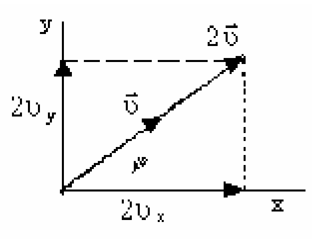
$$a_x = a\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$a_y = a\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Dakle, $a_x = a_y = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

2.4. Vektor $v$ zaklapa ugao 30˚ sa $x$-osom. Naći komponente vektora $2v$ duž pravaca $x$ i $y$ - ose.

✍




$$(2v)_x = 2v\cos 30° = 1{,}73v$$

$$(2v)_y = 2v\sin 30° = v$$

$\sin 30° = 0{,}5$, $\cos 30° = 0{,}866$

2.5. * Vektor $\vec{a}$ zaklapa ugao $\alpha$ = 45˚, a vektor $\vec{b}$ ugao $\beta$ = 135˚ sa x-osom. Nađi intenzitete vektora. a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, ako je $a$ = 14,1 cm i $b$ = 28,2 cm = 2$a$.

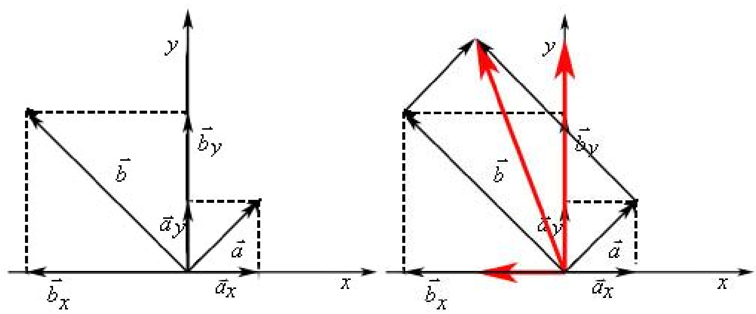
✍

$\alpha = 45°$, $a = 14{,}1\,\text{cm}$

$\beta = 135°$, $b = 28{,}2\,\text{cm} = 2a$

a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

b) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$




Vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ treba razložiti na komponente u pravcima $x$ i $y$ - osa, tako da je

a) $c_x = a_x + b_x$ ; $c_y = a_y + b_y$ i $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$. Kako je:

$a_x = a\cos 45° = a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b_x = -b\frac{\sqrt{2}}{2} = -2a\frac{\sqrt{2}}{2}$, to je $c_x = \frac{a\sqrt{2}}{2} + (-2a\frac{\sqrt{2}}{2}) = -a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Takođe,

$a_y = a\sin 45° = a\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b_y = b\frac{\sqrt{2}}{2} = 2a\frac{\sqrt{2}}{2}$, pa je $c_y = a_y + b_y = a\frac{\sqrt{2}}{2} + 2a\frac{\sqrt{2}}{2} = 3a\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle,

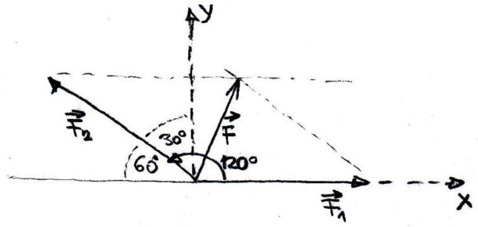
$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(3a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2\frac{2}{4} + 9a^2\frac{2}{4}} = a\sqrt{\frac{1}{2}(1+9)} = a\sqrt{\frac{10}{2}} = 31{,}5\ \text{cm}$$

b) $d$ = 31,5 cm.

2.6. Vektori $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zaklapaju ugao 120°. Naći intezitet njihovog zbira i razlike, ako je $F_1$ = 20 N, a $F_2$ = 10 N.

✍ a) 17 N b) 26 N jer

$\alpha = 120°$
$F_1 = 20\,N$
$F_2 = 10\,N$
$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = ?$
$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = ?$




$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$F_{1x} = F_1 = 20N \qquad F_{1y} = 0$

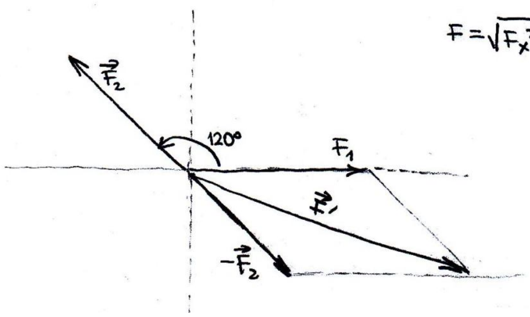
$F_{2x} = F_2 \cos 120° = F_2(-0{,}5) = -0{,}5 \cdot 10N = -5N$

$F_{2y} = F_2 \sin 120° = 0{,}866 F_2 = 8{,}66 \cdot 10N = 8{,}7N$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow$ $F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + (-0{,}5F_2) = 2F_2 - 0{,}5(F_2) = 1{,}5F_2 = 1{,}5 \cdot 10N = 15N$

$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + 0{,}866F_2 = 0{,}866 \cdot 10N = 8{,}66N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(15N)^2 + (8{,}7N)^2} = \sqrt{225 + 75{,}7}\ N = 17N$



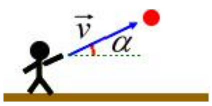

$\vec{F}' = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$

$F_x = F_{1x} - F_{2x} = F_1 - (-0{,}5F_2) = 2F_2 + 0{,}5F_2 = 2{,}5F_2 = 25N$

$F_y = F_{1y} - F_{2y} = 0 - (8{,}7N) = -8{,}7N$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(25N)^2 + (-8{,}7N)^2} = 26N$

2.7. Divac baca košarkašku loptu početnom brzinom 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ (22 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$), pod uglom 30° u odnosu na teren. Odrediti horizontalnu i vertikalnu komponentu brzine.




$v = 80\ \frac{km}{h} = 22\ \frac{m}{s}$

$\alpha = 30°$

$v_x = ? \quad v_y = ?$

$v_x = v\cos 30° = 80\ \frac{km}{h} \cdot 0{,}866 = 69{,}28\ \frac{km}{h} = 19{,}24\ \frac{m}{s} = 19\ \frac{m}{s}$

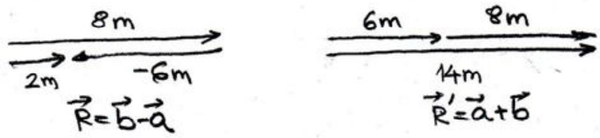
$v_y = v\sin 30° = 80\ \frac{km}{h} \cdot 0{,}5 = 40\ \frac{km}{h} = 40\ \frac{10^3 m}{3600 s} = 11\ \frac{m}{s}$

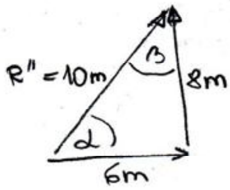
2.8. Prikazati kako dva vektora koji imaju intezitete 6 m i 8 m mogu dati rezultujući vektor intenziteta: (a) 2 m, (b) 14 m, i (c) 10 m.

✍

$a = 6\,m$
$b = 8\,m$

a) $R = 2\,m$
b) $R' = 14\,m$
c) $R'' = 10\,m$




$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 10^2 = R''$

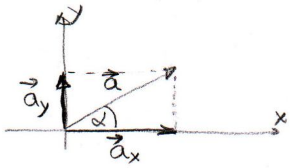
$\arcsin\left(\frac{8m}{10m}\right) = \arcsin 0{,}8 = 53° = \alpha$ $\quad \beta = 90 - \alpha$

$37° = \beta$

2.9. Vektor $\vec{a}$ intenziteta 10 cm, nalazi se pod uglom od 37°, u odnosu na x-osu. Grafički razložiti vektor $\vec{a}$ na komponente i naći njihove intenzitete.

✍ $a_x = 8\,\text{cm}$
$a_y = 6\,\text{cm}$ jer

$|\vec{a}| = 10\,cm$
$\alpha = 37°$




$\vec{a}_x = a_x \vec{i}$ $\quad \vec{a}_y = a_y \vec{j}$

$a_x = a\cos\alpha$ $\quad a_y = a\sin\alpha$

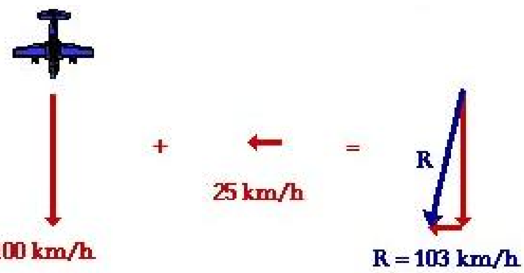
$a_x = 10\,cm \cos 37°$ $\quad a_y = 10\,cm \cdot \sin 37°$

$a_x = 8\,cm$ $\quad a_y = 6\,cm$

2.10. Avion leti brzinom 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ prema jugu, a vetar duva brzinom 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ prema:
a) severu, b) zapadu. Naći rezultujuće vektore brzine.

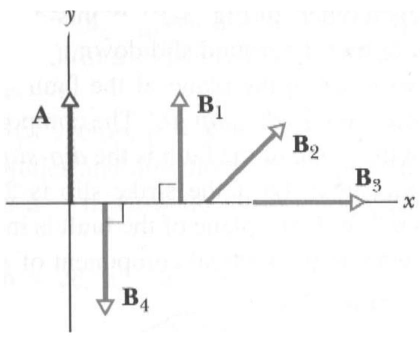
✍


$$100^2 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} + 25^2 \frac{\text{km}^2}{\text{h}^2} = R^2$$




a) b)

2.11. Slika prikazuje vektor $\vec{A}$ i četiri moguća pravca vektora $\vec{B}$. Koji od mogućih pravaca vektora $\vec{B}$ ($\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ ili $\vec{B}_4$, sa istim intenzitetima) daje najmanju vrednost proizvoda $\vec{A} \cdot \vec{B}$? Odgovor obrazložiti računom!




✍

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\sphericalangle \vec{A},\vec{B}) = AB\cos\alpha$

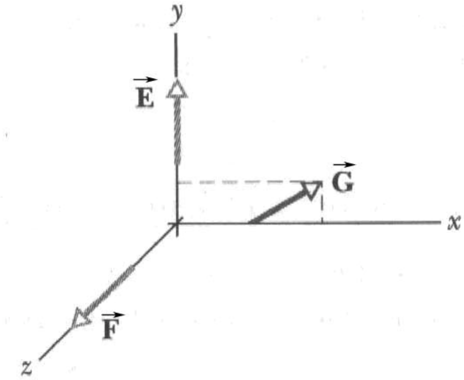
$\vec{A}\cdot\vec{B}_1 = AB\cos 0^\circ = AB$

$\vec{A}\cdot\vec{B}_2 = AB\cos\varphi$

$\vec{A}\cdot\vec{B}_3 = AB\cos 90^\circ = AB\cdot 0 = 0$

$\vec{A}\cdot\vec{B}_4 = AB\cos 180^\circ = AB\cdot(-1) = -AB$

2.12. a) Koji pravac i smer ima vektor $\vec{H} = \vec{E}\times\vec{F}$ . Docrtati vektor $\vec{H}$ na slici i označiti ga. Ako $\vec{F}$ ima intenzitet 3, a $\vec{E}$ ima intenzitet 2, koliki je intenzitet $\vec{H} = \vec{E}\times\vec{F}$ ? Isto uraditi za vektor $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{G}$ ako je intenzitet $\vec{G}$ 2.




✍

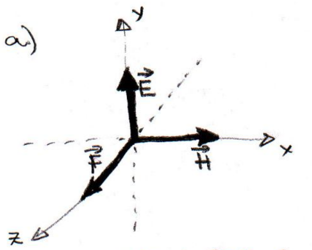
$\vec{H} = \vec{E}\times\vec{F}$

$|\vec{F}| = F = 3$

$|\vec{E}| = E = 2$

$|\vec{G}| = G = 2$

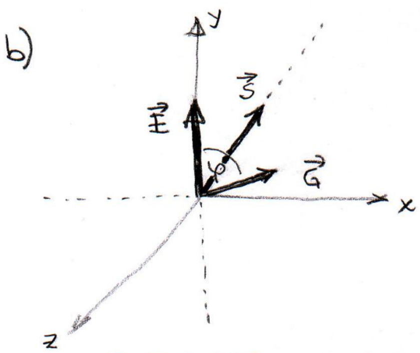
$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{G}$




$H = FE\sin 90^\circ = 6$

ili

$|\vec{H}| = |\vec{F}|\cdot|\vec{E}|\sin 90^\circ = 6$




$S = EG\sin\varphi = 2\cdot 2\cdot\sin\varphi = 4\sin\varphi$

$|\vec{S}| = |\vec{E}|\cdot|\vec{G}|\sin\varphi = 2\cdot 2\cdot\sin\varphi = 4\sin\varphi$

# 3. Kretanje

3.1. Dati su parovi brojeva koji označavaju početni i krajnji položaj materijalne tačke pri kretanju duž *x* ose. Koji od datih parova daju negativan pomeraj? Prikazati skicom svaki par i njegov pomeraj kao dokaz za dati odgovor.

a) –3m, +5m;

b) -3m, -7m;

c) 7m, -3m.

✍

a) $x_1 = -3m$ ; $x_2 = +5m$

b) $x_1 = -3m$ ; $x_2 = -7m$

c) $x_1 = 7m$ ; $x_2 = -3m$

$\Delta x = ?$ ; $\Delta x < 0$

a)

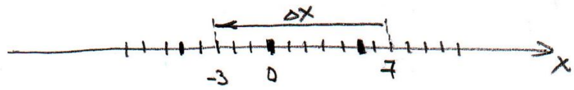


$\Delta x = x_2 - x_1 = [5-(-3)]m = 8m > 0$

b)



$\Delta x = x_2 - x_1 = [-7-(-3)]m = -4m < 0$

c)



$\Delta x = x_2 - x_1 = [-3-7]m = -10m > 0$

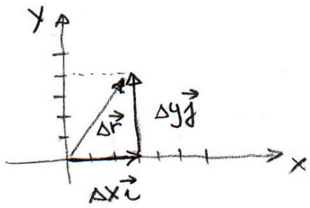
3.2. Materijalna tačka se pomera za $\Delta x = 3\text{m}$ u smery $x$ – ose, a zatim za $\Delta y = 4\text{ m}$, u smeru $y$-ose. Grafički i računski odrediti njen pomeraj.

✍ $\Delta r = 5\text{m}$ jer

$\Delta x = 3m$

$\Delta y = 4m$

$\Delta r = ?$




$\vec{\Delta r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}$

$|\vec{\Delta r}| = \Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$

$= \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} =$

$= \sqrt{9m^2 + 16m^2} = \sqrt{25m^2} =$

$\Delta r = 5m$

3.3. Na početku „posmatranog“ vremenskog intervala materijalna tačka se nađe u položaju A, a na kraju u položaju B. Koordinate tih položaja su: A=(7 m, 1 m), B=(1 m, 9 m). Odrediti projekcije i intenzitet vektora pomeraja.

✍ $\Delta x = x_2 - x_1 = -6\text{ m}$; $\Delta y = y_2 - y_1 = 8\text{ m}$; $\Delta r = 10\text{ m}$ jer

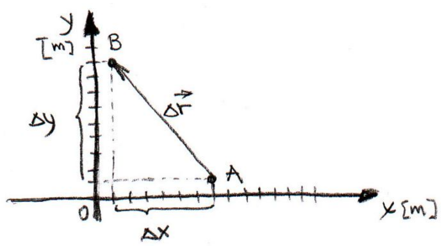
$A = (7m, 1m)$

$B = (1m, 9m)$

$\Delta x = ?$

$\Delta y = ?$

$\Delta r = ?$




$\Delta x = x_2 - x_1 = 1m - 7m = -6m$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 9m - 1m = 8m$

$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{36m^2 + 64m^2} =$

$= \sqrt{100m^2} = 10m$

$\Delta r = 10m$

3.4. Vrlo velike udaljenosti merimo svetlosnim godinama. To je udaljenost koja je jednaka putu koji svetlost pređe za godinu dana. Koji red veličine ima ta jedinica, izražena u metrima?

✍

$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$t = 1g = 365d = 365 \cdot 24 \cdot 36000 \cong 400 \cdot 20 \cdot 4000 s = 32 \cdot 10^6 s$

$s = ?$

$v = \frac{s}{t}$ ; $s = v \cdot t = c \cdot t$

$s = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{\cancel{s}} \cdot 32 \cdot 10^6 \cancel{s} \cong 3 \cdot 30 \cdot 10^8 \cdot 10^6 m = 90 \cdot 10^{14} m = 9 \cdot 10^{15} m$

$s \cong 10 \cdot 10^{15} m = 10^{16} m$

3.5. Telo se kreće stalnom brzinom $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Koliko kilometara pređe telo za vreme od 1 h?

✍

$t = 1\,\text{h}$

$v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = const$

$s = ? \quad [s] = \text{km}$

$$v = 10 \frac{10^{-3}\,\text{km}}{\frac{1}{3600}\,\text{h}} = 10 \frac{\frac{1}{1000}\,\text{km}}{\frac{1}{3600}\,\text{h}} = 10 \frac{3600}{1000} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Na osnovu zakona za ravnomerno pravolinijsko kretanje je:

$s = v \cdot t = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{h} = 36\,\text{km}.$

3.6. Krećući se stalnom brzinom, automobil pređe put $s$ = 0,1 km, za vreme $t$ = 0,001 h. Kolika je brzina automobila? Dobijenu brzinu izraziti u $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ i $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

✍

$v = const$

$s = 0{,}1\ km = 0{,}1 \cdot 10^3 m = 10^2 m$

$t = 0{,}001\ h = 10^{-3} h = 10^{-3} \cdot 3600 s = 3{,}6 s$

$v = ?$

$[v] = \frac{m}{s}$ ; $[v] = \frac{km}{h}$

$v = \frac{s}{t} = \frac{1 \cdot 10^2 m}{3{,}6 s} = 0{,}3 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$

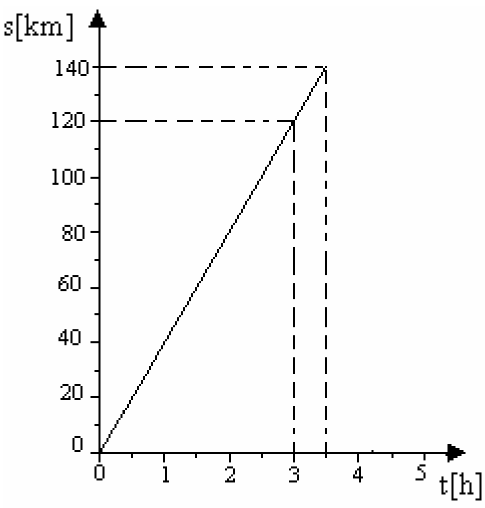
$v = \frac{0{,}1\ km}{0{,}001\ h} = \frac{10^{-1} km}{10^{-3} h} = 10^2 \frac{km}{h} = 100 \frac{km}{h}$

3.7. Na slici je dat grafik zavisnosti puta od vremena za neko kretanje. Na osnovu grafika odrediti:

a) put koji pređe telo za 3 h;

b) vreme za koje će telo preći 140 km;

c) brzinu kretanja tela.




✍ a) Sa grafika se može pročitati da nakon 3 h kretanja telo prelazi put od 120 km.

b) Takođe, na osnovu grafika vidi se da će telo preći put od 140 km za 3,5 h.

v) Brzinu kretanja možemo odrediti korišćenjem podataka za put i proteklo vreme pod a), b), ili bilo koji drugi par saglasnih vrednosti. Dakle:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{120}{3}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

3.8. Voz se kreće brzinom 72 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ i pred stanicom započinje kočenje, tako da se zaustavi za 1 min od momenta kada je počelo kočenje. Koliko je usporenje voza?

✍

$v_0 = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$t = 1\text{ min} = 60\text{ s}$

$\underline{v = 0}$

$a = ?$

teorija:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\ ;\quad a = \text{const} \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$t_0 = 0$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow at = v - v_0 \Rightarrow v = v_0 + at$$

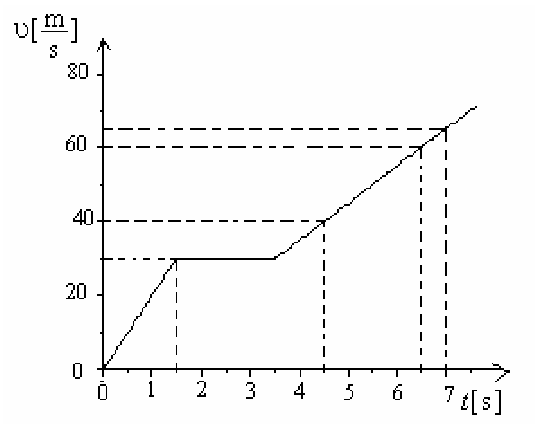
$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v = 0\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ t = 60\text{s} \end{array}\right\} \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\frac{\text{m}}{\text{s}} - 20\frac{\text{m}}{\text{s}}}{60\text{s}} = -\frac{20}{60}\frac{\frac{\text{m}}{\text{s}}}{\text{s}} = -\frac{1}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -0{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

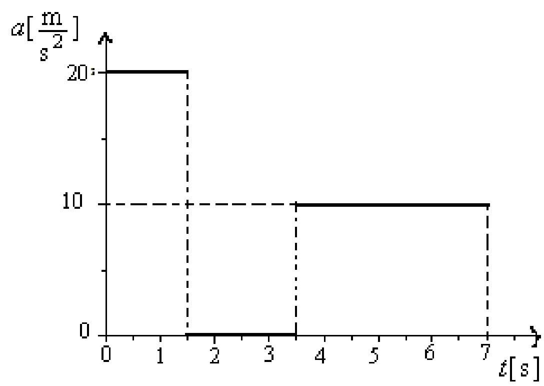
3.9. Na slici je dat grafik zavisnosti brzine od vremena $v(t)$ za neko kretanje. Nacrtati grafik zavisnosti ubrzanja od vremena $a(t)$.

✍ Na osnovu grafika $v(t)$ vidi se da se kretanje sastoji iz tri dela:

od 0 s do 1,5 s kretanje je jednako ubrzano sa ubrzanjem $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30}{1{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; od 1,5 s do 3,5 s kretanje je sa stalnom brzinom, odnosno $a = 0$; od 3,5 s do 7 s kretanje je jednako ubrzano, sa ubrzanjem, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 40}{6{,}5 - 4{,}5}\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

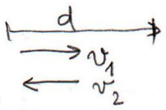
Na osnovu izračunatih vrednosti za sve tri etape kretanja možemo nacrtati traženi grafik $a(t)$.




3.10. Put između dva grada automobil pređe brzinom od 30 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a potom se automobil vrati nazad. Kojom brzinom treba da se kreće automobil u povratku da bi srednja brzina na ukupnom putu iznosila 20 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

✍ $v_2 = \frac{v_1 \cdot \bar{v}}{2v_1 - \bar{v}} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$ jer




$v_1 = 30\frac{m}{s}$; $v_{sr} = \bar{v} = 20\frac{m}{s}$

$v_2 = ?$

$v_1 = \frac{d}{t_1}$; $v_2 = \frac{d}{t_2} \Rightarrow t_1 = \frac{d}{v_1}$; $t_2 = \frac{d}{v_2}$

$v_{sr} = \bar{v} = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$

$v_{sr} = \bar{v} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{v_2 + v_1}{v_1 \cdot v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_2 + v_1}$

$2v_1 v_2 = \bar{v}(v_2 + v_1)$ $\quad 2v_1 v_2 = \bar{v}v_2 + \bar{v}v_1$ $\quad 2v_1 v_2 - \bar{v}v_2 = \bar{v}v_1$

$v_2(2v_1 - \bar{v}) = \bar{v}v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\bar{v}v_1}{2v_1 - \bar{v}} = \frac{20\frac{m}{s} \cdot 30\frac{m}{s}}{2 \cdot 30\frac{m}{s} - 20\frac{m}{s}} = \frac{6 \cdot 10^2}{40}\frac{m}{s} = 15\frac{m}{s}$

3.11. Pokretnom trakom, nagnutom pod uglom 45˚, premeštaju se proizvodi iz jednog dela hale u drugi. Naći horizontalnu i vertikalnu komponentu brzine trake ako proizvodi za 10 s pređu put dužine 4 m.

✍

$\alpha = 45°$

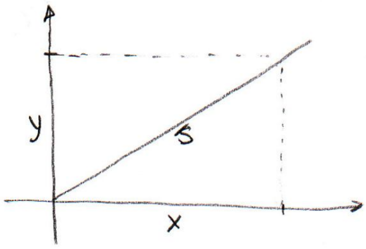
$t = 10 s$

$s = 4 m$

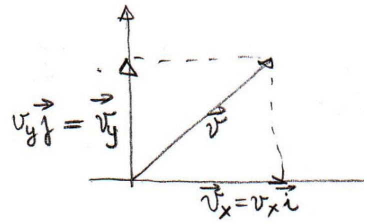
$v = ?$

$v_x = v_h = ?$

$v_y = v_v = ?$




$v = \frac{s}{t} = \frac{4m}{10s} = 0{,}4\frac{m}{s}$




$v_x = v\cos 45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$

$v_y = v\sin 45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$

3.12. Materijalna tačka se kreće brzinom $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ u smeru $x$-ose. U kom položaju će biti nakon 2 s, ako je u početnom trenutku bila u položaju: a) 2m; b) -2 m?

✍ .

$v = 2\frac{m}{s}$

$t = 2s$

a) $x_0 = 2m$

b) $x_0 = -2m$


$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow v \cdot t = x - x_0$

$t_0 = 0$

$x = x_0 + v \cdot t$

a) $x = 2m + 2\frac{m}{s} \cdot 2s = 2m + 4m = 6m$

b) $x = -2m + 2\frac{m}{s} \cdot 2s = -2m + 4m = 2m$

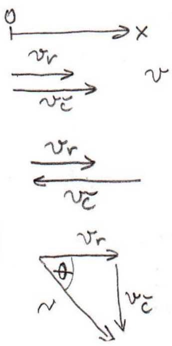
## *Relativno kretanje*

3.13. Kolika je brzina čamca u odnosu na obalu, ako se čamac kreće: a) niz reku; b) uz tok reke; c) normalno na tok reke? Brzina toka reke je $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a brzina čamca u odnosu na reku $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

✍ a) 6 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$; c) 4,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pod uglom 63,5° od obale jer

$v_r = 2\frac{m}{s}$

$v_{\check{c}r} = 4\frac{m}{s}$




a) $v = v_r + v_{\check{c}} = 6\frac{m}{s}$

b) $v = v_r - v_{\check{c}} = (2-4)\frac{m}{s} = -2\frac{m}{s}$

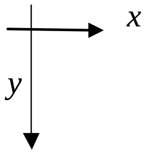
c) $v = \sqrt{v_r^2 + v_{\check{c}}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}\,\frac{m}{s} =$

$v = 4{,}5\frac{m}{s}$

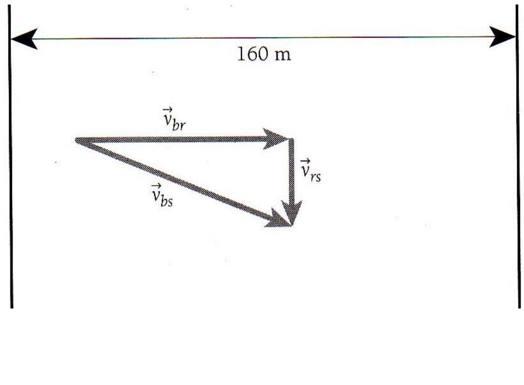
$tg\theta = \frac{4}{2} = 1$, $tg\theta = 2$ $\theta = arctg 2$

3.14. Brod prelazi reku širine 160 m i brzine toka $v_{rs}$=1,5 ms$^{-1}$. Kapetan broda održava pravac kretanja normalan sa obalom i sa konstantnom brzinom od $v_{br}$=2,0 ms$^{-1}$. Kolika je brzina broda u odnosu na nepokretnog posmatrača na obali? Koliko će rastojanje nizvodno preći brod u toku prelaska preko reke?

✍




$\Delta x = 160\text{ m}$, $v_x = v_{br}$, $v_y = v_{rs}$




$v_{rs}$ - brzina reke u odnosu na obalu

$v_{br}$ - brzina broda u odnosu na obalu

$v_{br}$ - brzina broda u odnosu na reku

Brod se kreće prema drugoj obali zahvaljujući svom motoru i niz reku zbog kretanja vode a posmatrač na obali uočava relativnu brzinu koja je rezultat oba ova kretanja

$$v_{bs} = \sqrt{v_{br}^2 + v_{rs}^2} = 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad t = \frac{\Delta x}{v_x} = \frac{160}{2{,}00}\text{s} = 80{,}0\ \text{s}; \quad \Delta y = v_y t = 1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\,80\text{s} = 120\text{m}$$

# 4. Sila

4.1. Kolika je sila koja telu mase 20g saopštava ubrzanje 10 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ?

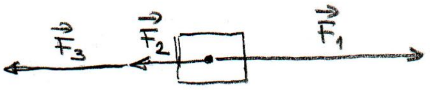
✍ 


Na osnovu drugog Njutnovog zakona je $F = m \cdot a$;

$$F = 0{,}02\ \text{kg} \cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}2\ \text{N}$$

4.2. Na jedno telo dejstvuju tri sile: sila $F_1 = 5$ N i dve sile $F_2 = 2$ N i $F_3 = 3$ N koje deluju u suprotnom smeru u odnosu na silu $\vec{F}_1$. Kako se kreće to telo?

✍




$$\vec{F}_r = \sum_i \vec{F}_i = 0$$

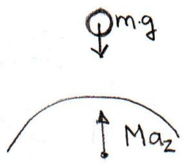
Pošto je $F_r = 0$ i ubrzanje tela je jednako nuli, tako da postoje dve mogućnosti za stanje u kome se telo nalazi: a) telo se kreće stalnom brzinom, ako se i pre dejstva sila kretalo tom brzinom, odnosno b) telo prividno miruje, ako je i pre dejstva sila mirovalo.

4.3. Ako student od 60 kg, koji pada, ima ubrzanje prema Zemlji od 9,81 ms$^{-2}$, koliko je ubrzanje Zemlje prema njemu u toku pada. Masa Zemlje je 5,98x10$^{24}$kg.

✍

$m = 60$ kg
$g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

$a_z = ?$




Sila kojom Zemlja deluje na studenta $Ma_Z = 588$ N;

$$a_Z = (588\text{N}) \div (5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}) = 9{,}83 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ na gore.}$$

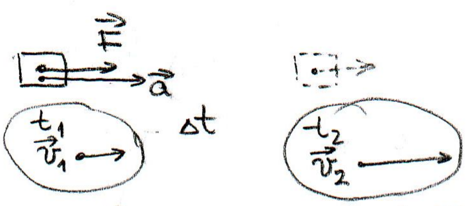
$$F = mg = 60 \cdot 9{,}8\ \text{N} = 588\ \text{N}$$

4.4. Pod dejstvom konstantne sile, telu mase 85 kg, menja se brzina sa 3,0 ms$^{-1}$ na 4,0 ms$^{-1}$ u toku intervala vremena od 0,50 s. Izračunati ubrzanje tela, silu koja na njega deluje kao i ubrzanje koje bi imalo telo mase 58 kg pod dejstvom iste sile?

✍

$F = \text{const}$
$M = 85$ kg
$v_1 = 3{,}0\ \text{ms}^{-1}$
$v_2 = 4{,}0\ \text{ms}^{-1}$
$\Delta t = 0{,}50\text{s}$
$m' = 58$ kg

$a = ?$ $F = ?$
$a' = ?$ za $F' = F$

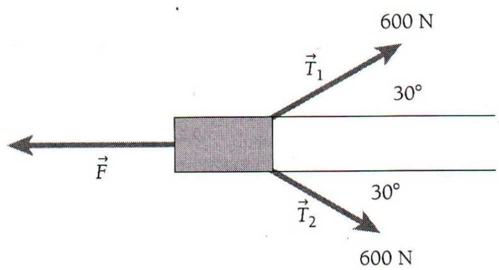



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{4{,}0\ \text{ms}^{-1} - 3{,}0\ \text{ms}^{-1}}{0{,}500}$$

Ubrzanje tela je $a = 2{,}0\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Ukupna sila $F = Ma = 85\mathrm{kg}\ 2\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 170\,\mathrm{N}$.

Ubrzanje tela mase 58 kg pod dejstvom iste sile bilo bi $a = 170\,\mathrm{N}/58\mathrm{kg} = 2{,}9\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

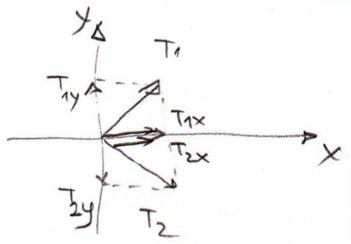
4.5. Dva čoveka vuku brod kroz vodu kao što prikazuje slika. Svaki čovek deluje silom od 600 N pod uglom od 30° u odnosu na brod. Ako se brod kreće ravnomerno i pravolinijski odrediti silu otpora sredine.




✍

$\sin 30° = \frac{1}{2}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$T_1 = 600\ \mathrm{N}$
$T_2 = 600\ \mathrm{N}$
$\alpha = 30°$

$F = ?$



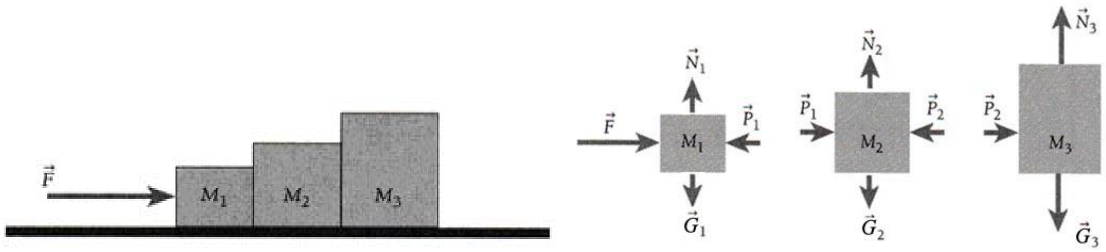

Ukupna sila na brod mora biti jednaka nuli pošto se brod kreće ravnomerno i pravolinijski. (Prvi Njutnov zakon).

$T_{1x} + T_{2x} + F_x = 0$, $T_{1x} = T_1 \cos 30°$; $T_{2x} = T_2 \cos 30°$; 520 N+520 N+$F_x$=0

$T_{1y} + T_{2y} + F_y = 0$, $T_{1y} = T_1 \sin 30°$; $T_{2y} = -T_2 \sin 30°$; 300 N+300 N+$F_y$=0

$x$ i $y$ komponente sile otpora sredine su: $F_x$=-1040 N, $F_y$=0.

4.6. Tri tela koja se dodiruju nalaze se na podlozi po kojoj mogu da se kreću bez trenja. Horizontalna sila deluje na telo $M_1$. Ako su mase tela 2,00 kg, 3,00 kg, i 4,00 kg i ako je sila 18,0 N, naći ubrzanje tela, rezultantu sila na svako telo i sile kojima jedno telo deluje na drugo?




✍

$M_1 = 2{,}00$ kg
$M_2 = 3{,}00$ kg
$M_3 = 4{,}00$ kg
$F = 18{,}0$ N

$a = ?$

Sva tri tela moraju imati isto ubrzanje. Ukupna sila koja deluje u pravcu $x$ - ose na svako telo 1, 2 i 3, posebno, je:

1 $\vec{F} - \vec{P}_1 = M_1\vec{a}$

2 $\vec{P}_1 - \vec{P}_2 = M_2\vec{a}$

3 $\vec{P}_2 = M_3\vec{a}$

$F - P_1 = M_1 a$
$P_1 - P_2 = M_2 a$
$P_2 = M_3 a$

$F - P_1 = M_1 a$
$P_1 - M_3 a = M_2 a \Rightarrow P_1 = M_2 a + M_3 a = (M_2 + M_3) a$

$$F-(M_2+M_3)a=M_1a$$
$$F=M_1a+(M_2+M_3)\cdot a=(M_1+M_2+M_3)\cdot a$$
$$a=\frac{F}{M_1+M_2+M_3}=\frac{18{,}0\ \mathrm{N}}{(2{,}00+3{,}00+4{,}00)\ \mathrm{kg}}=\frac{18}{9}\,\frac{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}}=2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Iz ovih izraza za ubrzanje se dobija

$$\vec{a}=2.00\ \mathrm{m/s^2}$$

Ukupna sila na telo 3 je

$$P_2=(4.00\ \mathrm{kg})(2.00\ \mathrm{m/s^2})=8.00\ \mathrm{N}$$

a na telo 1

$$(18.0\ \mathrm{N})-P_1=(2.00\ \mathrm{kg})(2.00\ \mathrm{m/s^2})=4.00\ \mathrm{N}$$

$$P_1=14.0\ \mathrm{N}$$

Kao provera računa se sila na telo 2 koja mora biti 6,00 N jer je

$P_1-P_2=\sum F_i\ \ (drugo\,telo)\ =M_2a=3\mathrm{kg}\ 2\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=6\mathrm{N}$ . Zapaziti da je

$$P_1-P_2=6.00\ \mathrm{N}.$$

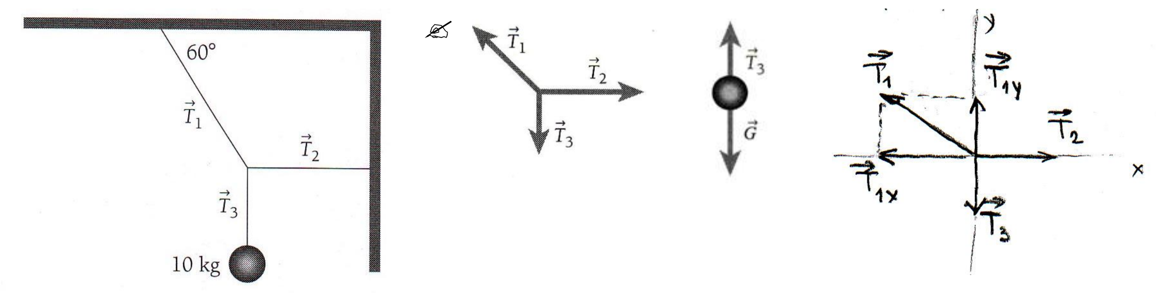
Može i ovako ali je bolje i lakše ako se radi na prvi način

$$18\,\mathrm{N}-P_1=2\mathrm{kg}\cdot a$$
$$P_1-P_2=3\mathrm{kg}\cdot a$$
$$P_2=4\mathrm{kg}\cdot a$$

$$18\,\mathrm{N}-P_1=2\mathrm{kg}\cdot a$$
$$P_1-4\mathrm{kg}\cdot a=3\mathrm{kg}\cdot a\ \Rightarrow\ P_1=7\mathrm{kg}\cdot a$$

$$18\,\mathrm{N}-7\mathrm{kg}\cdot a=2\mathrm{kg}\cdot a$$
$$18\,\mathrm{N}=2\mathrm{kg}\,a+7\mathrm{kg}\,a=9\,\mathrm{kg}\,a$$
$$a=\frac{18\,\mathrm{N}}{9\,\mathrm{kg}}=2\,\frac{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{kg}}=2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

4.7. Izračunati silu zatezanja u svakom užetu za sistem prikazan na slici.




Nacrtati dijagram sa svim silama, utvrditi da li je sistem u ravnoteži i izračunati težinu loptice!

Sistem je u ravnoteži pa je ukupna sila jednaka nuli.

Težina kuglice je $G=mg$=98,0 N.

Sila zatezanja $T_3$ je onda $T_3=G$=98,0 N, usmerena na dole i nema $x$ komponentu nego samo $y$. $T_2$ deluje pod uglom od 0° u odnosu na $x$ osu, a $T_1$ pod uglom od 120°. Rastavljajući te sile na komponente dobija se

$T_{1x} = T_1 \cos 120° = -0.5\ T_1$
$T_{1y} = T_1 \sin 120° = +0.866\ T_1$

$T_{2x} = T_2 \cos 0° = T_2$
$T_{2y} = T_2 \sin 0° = 0$

$T_{3x} = T_3 \cos 270° = 0$
$T_{3y} = T_3 \sin 270° = -98.0\ \mathrm{N}$

$T_3 = -98\mathrm{N}$

$T_{1x} = T_2 \Rightarrow T_2 = 0{,}5\, T_1$

$T_{1y} = T_3 = 98\mathrm{N}$

$T_{1y} = T_1 \cdot 0{,}866 \Rightarrow T_1 = \frac{98\mathrm{N}}{0{,}866} = 113\mathrm{N}$

$\Rightarrow T_1 = 113\mathrm{N}$

$T_2 = 0{,}5\, T_1 = 113\mathrm{N} \cdot 0{,}5 = 56{,}5\mathrm{N}$

Konačno je $T_1$=113 N i $T_2$=56,5 N.

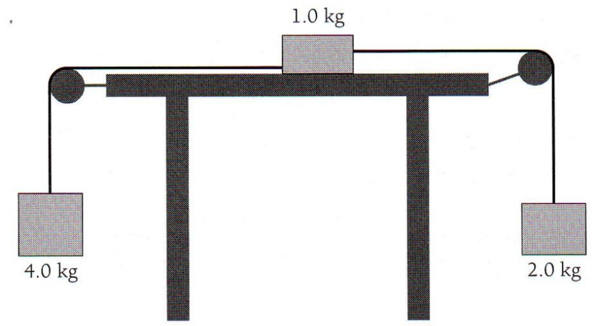
4.8. Tri tela su povezana užetom kao na slici i kreću se bez trenja po podlozi. Odrediti ubrzanje i smer kretanja svakog tela pojedinačno i sile zatezanja.

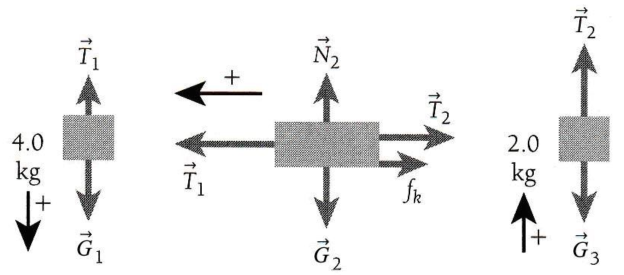
✍ Može li se pretpostaviti koje od tela će se kretati na dole, telo od 4,0 kg ili od 2,0 kg?

Kakva je veza između ubrzanja pojedinih tela?

Nacrtati dijagram sila koje deluju na svako telo pojedinačno.

Telo od 4kg se kreće ubrzano na dole jer je njegova težina veća. Ubrzanja svih tela ista su jer su tela povezana nerastegljivim užetom. Sile na pojedinačna tela prikazane su na sledećoj slici:




II Njutnov zakon za svako telo daje

4,0 kg $G_1 - T_1 = m_1 a$

1,0 kg $T_1 - T_2 = m_2 a$

2,0 kg $T_2 - G_3 = m_3 a$

Iz prvog i trećeg izraza dobija se vrednost za $T_1$ i $T_2$ i

$$a = \frac{G_1 - G_3}{M_1 + M_1 + M_1} = \frac{39{,}2\mathrm{N} - 19{,}6\mathrm{N}}{7\mathrm{kg}} = 2{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$T_1 = G_1 - m_1 a = 28{,}0\mathrm{N}$$

$$T_2 = G_3 + m_3 a = 25{,}2\mathrm{N}$$

Za proveru, ukupna sila na telo mase 1 kg je $T_1 - T_2 = 2{,}8$ N. Tolika sila je potrebna da bi to telo imalo ubrzanje od 2,8 ms$^{-2}$.

# 5. Fizička polja

5.1. Jačina gravitacionog polja Zemlje na nekoj visini iznosi 75 N/kg. Koliko je ubrzanje Zemljine teže na toj visini? Kolika je težina tela mase 1 kg na toj visini?

✍ $I = 75\,\frac{N}{kg}$

$g' = ?$ $G = ?$ $m = 1\,kg$

$$g' = \frac{F}{m} = I\frac{m}{m} = I = 75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad G = mg' = 75\mathrm{N}$$

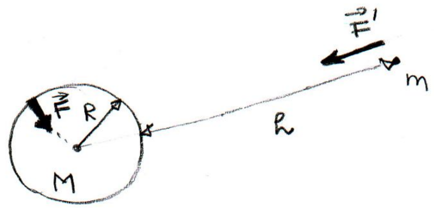
5.2. Odredi ubrzanje Zemljine teže na visini 3$R$ iznad površine Zemlje ako se zna da je $R$ poluprečnik Zemlje i iznosi 6370 km.

✍

$g' = ?$

$h = 3R$

$R = 6370\,km$




$$F = mg = \gamma\frac{mM}{R^2}; \quad F' = mg' = \gamma\frac{mM}{(R+H)^2}; \qquad g' = \gamma\frac{M}{(R+H)^2} = \gamma\frac{M}{(4R)^2} = g\frac{1}{16} = 0{,}61\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5.3. Kolika je jačina električnog polja tačkastog naelektrisanja od 0,1 μC na rastojanju 0,2 m od njega? Naelektrisanje se nalazi u a) vazduhu, b) sredini čija je relativna dielektrična konstanta 10.

✍ $E = ?$

$q = 0{,}1\,\mu C$

$r = 0{,}2\,m$

a) $\varepsilon_0 \rightarrow k = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}$

b) $\varepsilon_0\varepsilon_r \rightarrow \varepsilon_r = 10$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}$


$$E = \frac{F}{q_p} \quad \Rightarrow$$

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2} = 22{,}5\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}};$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1}{r^2} = 2{,}25\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{C}}$$

5.4. Intenzitet homogenog električnog polja iznosi 600 N/C. Kolikom silom deluje ovo polje na elektron i koliko mu ubrzanje daje? Naelektrisanje elektrona je $1{,}6\cdot 10^{-19}$ C, a masa $9\cdot 10^{-31}$kg.

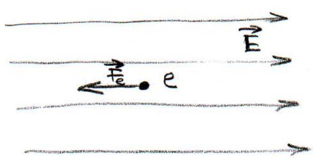
✍ $E = 600\,\frac{N}{C}$

$F = ?$

$a = ?$

$m_e = 9\cdot 10^{-31}\,kg$

$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$




$$E = \frac{F}{q_p} = \frac{F_e}{q_e} \;\Rightarrow\; F_e = eE = 9{,}6\cdot 10^{-17}\,\mathrm{N};$$

$$F_e = m_e a_e \;\Rightarrow\; a_e = \frac{F_e}{m_e} = 1{,}1\cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

5.5. Jezgro atoma deuterijuma ($^2_1\mathrm{H}$) deluje na elektron Kulonovom silom intenziteta $8{,}1\cdot 10^{-8}$ N. Odredi rastojanje elektrona od jezgra.

✍ jezgro: (1p+1n), $+q_e$; omotač: (1e), $-q_e$

${}_1H^2 = 1p + 1n$

$F = 8{,}1\cdot 10^{-8}\,N$

$r = ?$

$q_e = e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$

$k = 9\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}$

$$F_e = k\frac{q_e q_e}{r^2} \qquad r = q_e\sqrt{\frac{k}{F}} = 0{,}533\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

5.6. Kuglica težine 0,1 N naelektrisana je sa $3\cdot10^{-7}$ C i obešena je vertikalno iznad kuglice koja je naelektrisana sa $2\cdot10^{-8}$ C. Rastojanje između kuglica iznosi 10 cm. Odredi za koliko će se smanjiti težina obešene kuglice.

✍

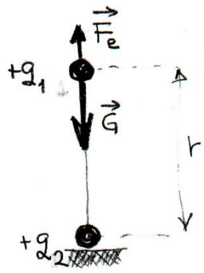
$G = 0{,}1\,\mathrm{N}$

$q_1 = 3\cdot10^{-7}\,\mathrm{C}$

$q_2 = 2\cdot10^{-8}\,\mathrm{C}$

$r = 10\,\mathrm{cm}$

$\Delta G = ?$




$$F_e = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{3\cdot10^{-7}\mathrm{C}\cdot2\cdot10^{-8}\mathrm{C}}{(10\cdot10^{-2}\mathrm{m})^2} =$$

$$= 9\cdot10^9\,\frac{6\cdot10^{-15}}{10^{-2}}\,\frac{\mathrm{Nm}^2\cdot\cancel{\mathrm{C}^2}}{\cancel{\mathrm{C}^2}\,\mathrm{m}^2} = 54\cdot10^{-6}\cdot10^{2}\,\mathrm{N} = 54\cdot10^{-4}\,\mathrm{N}$$

$$G' = G - F_e = (1-0{,}05)\,\mathrm{N} = 0{,}95\,\mathrm{N}$$

5.7. Koliko puta je elektrostatička sila međusobnog dejstva dve alfa čestice na rastojanju $10^{-11}$cm veća od gravitacione? Koliko puta bi trebalo povećati masu čestica pa da se ova dejstva izjednače? Izraziti rezultat u procentima.

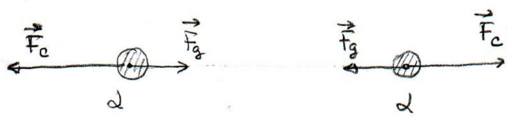
✍ $q = +2e = 2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$

$r = 10^{-11}\,\mathrm{cm} = 10^{-13}\,\mathrm{m}$

$m = m_{2p} + m_{2n} = 4\cdot1{,}67\cdot10^{-24}\,\mathrm{g} = 6{,}68\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$$x = \frac{\Delta m}{m}100\,\%$$

$$\frac{F_C}{F_g} = ?$$




$\alpha = 2p + 2n$

$$F_C = k\frac{qq'}{r^2} = 9{,}18\cdot10^{-2}\,N$$

$$F_g = \gamma\frac{mm'}{r^2} = 2{,}97\cdot10^{-37}\,N$$

$$\frac{F_C}{F_g} = 31\cdot10^{34}$$

$$F_C = F_g$$

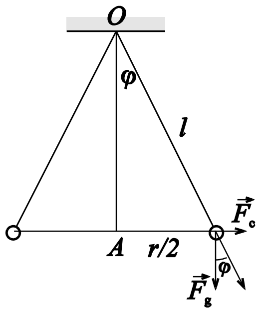
$$k\frac{qq'}{r^2} = \gamma\frac{mm'}{r^2};\, k\frac{q^2}{r^2} = \gamma\frac{(m+\Delta m)^2}{r^2}$$

$$\Delta m = q\sqrt{\frac{k}{\gamma}} - m$$

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{q}{m}\sqrt{\frac{k}{\gamma}} - 1 = 0{,}5\cdot10^{18}$$

5.8. *Dve jednake male kuglice od kojih svaka ima masu $5\cdot10^{-4}$kg obešene su o lake konce jednakih dužina (0,25 m) u istoj tački. Kada se kuglice naelektrišu jednakim količinama istoimenog elektriciteta odbiju se jedna od druge tako da rastojanje njihovih centara iznosi 0,04 m. Izračunati naelektrisanje jedne kuglice.

✍




$$F_c = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2},\quad F_g = mg,$$

$$\sin\varphi = \frac{r/2}{l},\quad \tan\varphi = \frac{F_c}{F_g},\quad \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

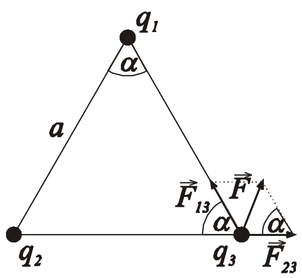
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1\right)^{-1}}$$

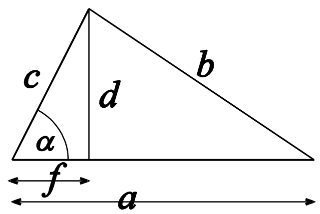
ili iz sličnosti trouglova $\frac{F_c}{F_g} = \frac{r/2}{\overline{OA}}$

$$\tan\varphi = \frac{k\frac{q^2}{r^2}}{mg} = \sqrt{\left(\left(\frac{2l}{r}\right)^2 - 1\right)^{-1}} \quad\Rightarrow\quad q = r\sqrt{\frac{mgr}{k\sqrt{4l^2 - r^2}}} = 8{,}3\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$$

5.9. *U temenima jednakostraničnog trougla, stranice 0,2 m, nalaze se tačkasta naelektrisana tela sa naelektrisanjima $2\cdot 10^{-5}$C, $-3\cdot 10^{-5}$C, $-10^{-5}$C. Odrediti vrednost sile koja deluje na telo sa naelektrisanjem $-10^{-5}$C.

✍




$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23};\qquad F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{a^2} = 45\mathrm{N}$$

$$F_{23} = k\frac{q_3 q_2}{a^2} = 67{,}5\mathrm{N}$$

$$F = \sqrt{F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23}\cos\alpha} = 59{,}5\ \mathrm{N}$$

$$\sin\alpha = \frac{d}{c},\quad \cos\alpha = \frac{f}{c},\quad b^2 = d^2 + (a-f)^2 =$$

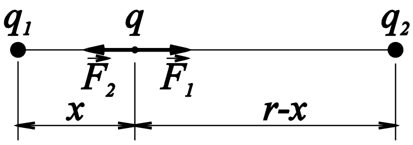
$$= (c\sin\alpha)^2 + (a - c\cos\alpha)^2 =$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\alpha;\qquad \alpha = 60°$$

5.10. *Dva tačkasta pozitivna naelektrisanja od 60 C i 40 C nalaze se u vazduhu na međusobnom rastojanju od 0,6 m. Odredi tačku u kojoj će elektrostatička sila, koja deluje na jedinicu pozitivnog naelektrisanja biti jednaka 0.

✍

Podsećanje: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$




$$F_1 = k\frac{q_1 q}{x^2},\quad F_2 = k\frac{q q_2}{(r-x)^2},\quad F_1 = F_2$$

$$k\frac{q_1 q}{x^2} = k\frac{q q_2}{(r-x)^2} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = r\frac{q_1 \pm \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2}$$

$x = 0{,}33\text{m}$

5.11. Izračunati elektrostatičku silu između dva elektrona, koji miruju i nalaze se na međusobnom rastojanju od $10^{-10}$ m, a zatim je uporediti sa gravitacionom silom između njih. Naelektrisanje i masa elektrona u mirovanju su $-1{,}602\cdot10^{-19}$C i $9{,}1083\cdot10^{-31}$kg.

$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2},\quad k = 9\cdot10^9\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}.$

✍

$$F_e = k\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\cdot10^9\frac{1{,}602\cdot10^{-19}\cdot1{,}602\cdot10^{-19}}{\left(10^{-10}\right)^2}\text{N} = 23\cdot10^{-9}\,\text{N}$$

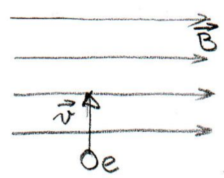
$$F_g = \gamma\frac{m_e m_e}{r^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{9{,}1083\cdot10^{-31}\cdot9{,}1083\cdot10^{-31}}{\left(10^{-10}\right)^2} = 5{,}53\cdot10^{-51}\,\text{N}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 4{,}1\cdot10^{42},\ F_g \langle\langle F_e$$

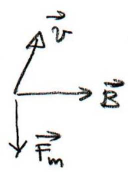
5.12. Krećući se brzinom 0,5*c* elektron uleće u homogeno magnetno polje normalno na vektor indukcije intenziteta 1 mT. Odrediti pravac, smer i intenzitet magnetne sile koja deluje na elektron.

✍

$v = 0{,}5c$
$B = 1\text{mT}$
$\vec{F}_m = ?$




$\vec{F}_m = e\,\vec{v}\times B$

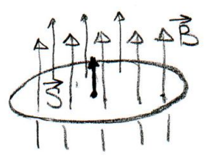



$$F_m = evB\sin\theta = evB = 24\cdot10^{-15}\,\text{N} = 25\ \text{fN}$$

5.13. Koliki je magnetni fluks magnetnog polja, jačine $B = 1\cdot10^{-2}$ T, kroz normalnu površinu $S = 40\ \text{cm}^2$? Koliki je ovaj fluks u veberima?

✍

$B = 1\cdot10^{-2}\,\text{T}$
$S = 40\,\text{cm}^2$
$\Phi = ?$



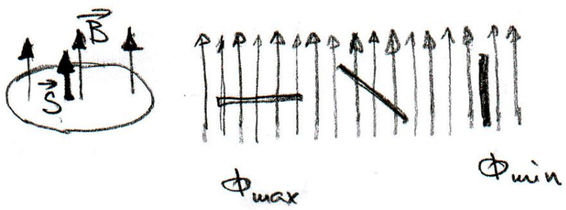

$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cos 0^\circ = BS$

$$\Phi = BS = 1\cdot10^{-2}\text{T}\cdot40\text{cm}^2 = 0{,}4\ \text{T}\cdot\text{cm}^2 = 4\cdot10^{-1}\cdot10^{-4}\text{T}\cdot\text{m}^2,\ \Phi = 40\ \mu\text{Wb}.$$

5.14. Kružni ram, poluprečnika $r = 25$ cm, nalazi se u magnetnom polju indukcije $B = 1$ mT. Koliki je magnetni fluks kroz ovaj kružni ram? Nacrtati međusobni položaj linija magnetne indukcije i površine rama za moguće različite vrednosti fluksa.

✍

$r = 25\,\mathrm{cm}$
$B = 1\,\mathrm{mT}$
$\Phi = ?\quad \Phi_{min},\ \Phi_{max}$

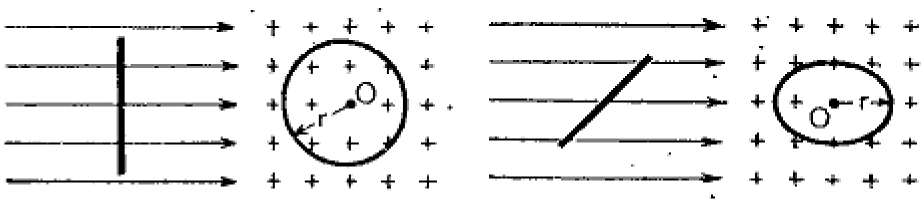



Magnetni fluks je maksimalan kada se ravan rama postavi normalno na linije magnetne indukcije i on iznosi

$$\Phi_{\max} = BS = B \cdot \pi \cdot r^2 = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25^2 \left(10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2 = 196\,\mu\mathrm{Wb}.$$

Magnetni fluks je nula kada se ram postavi paralelno linijama magnetne indukcije.

5.15. U homogenom magnetnom polju indukcije $B = 20\,\mathrm{mT}$ nalazi se kružni ram, poluprečnika $r$ = 10 cm, koji u odnosu na polje zauzima dva položaja prikazana na slikama (a) i (b). Koliki je magnetni fluks u oba slučaja?




(a) (b)

✍

$B = 2\,\mathrm{mT}$
$r = 10\,\mathrm{cm}$
$\Phi_a,\ \Phi_b = ?$

a) $\sphericalangle(\vec{B},\vec{S}) = 0^\circ$; $\cos 0^\circ = 1$
b) $\sphericalangle(\vec{B},\vec{S}) = 45^\circ$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Phi_a = BS = B \cdot \pi \cdot r^2 = 628\ \mu\mathrm{Wb}; \qquad \Phi_b = BS\cos 45^\circ = \Phi_a \frac{\sqrt{2}}{2} = 442\ \mu\mathrm{Wb}.$$

# 6. Rad, energija, snaga

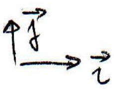
6.1. Sila $\vec{F} = (4{,}0x\vec{i} + 3{,}0y\vec{j})\mathrm{N}$ deluje na telo koje se kreće duž $x$ ose od $x$ = 0 do $x$ = 5m. Koliki je rad izvršila ova sila?

✍

$\vec{F} = (4{,}0\,x\vec{i} + 3{,}0\,y\vec{j})\,\mathrm{N}$
$x_1 = 0\,\mathrm{m}$
$x_2 = 5\,\mathrm{m}$
$A = ?$

Sila je data u N a $x$ i $y$ u m, pa su onda koeficijenti u izrazu za silu 4,0 i 3,0 dati u N/m. Sila je promenljiva. $A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, a $d\vec{r} = dx\vec{i}$.

$$A = \int_{x=0}^{x=5.0\text{m}} (4{,}0x\vec{i} + 3{,}0y\vec{j})\text{N} \cdot dx\vec{i}$$




$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \int_{x=0}^{5} 4{,}0\, x\vec{i} \cdot dx\vec{i} + \int_{0}^{5} 3{,}0\, y\vec{j} \cdot dx\vec{i} = \int_{0}^{5} 4{,}0\, x dx \underbrace{(\vec{i}\cdot\vec{i})}_{=1} + \int_{0}^{5} 3y\, (\vec{j}\cdot\vec{i}) dx =$$

$$= 4\frac{\text{N}}{\text{m}} \frac{x^2}{2}\Big|_0^{5\text{m}} = 4\frac{\text{N}}{\text{m}}\left(\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\text{m}^2 = 4 \cdot \frac{25}{2}\,\text{Nm} = 50\text{J}$$

6.2. Koliki rad izvrši dizalica koja podigne teret od 2 t na visinu od 120 cm?

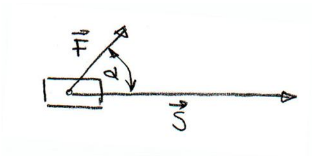
✍ $\vec{F} = -\vec{G} = mg\vec{j}$, $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mg\vec{j} \cdot \Delta y\vec{j} = mg\Delta y \cos 0° = mg\Delta y$ ili $G=mg$, $\Delta y=h$, pa je

$A = Gh = mgh = 23{,}5$ kJ

6.3. Na horizontalnoj površini leži telo mase 3 kg. Na njega dejstvuje sila 6 N, koja prema horizontalnoj ravni zaklapa ugao od 45°. Odrediti: a) rad sile, pošto je telo prešlo put od 4 m, bez trenja; b) brzinu tela na kraju puta.

✍

$F = 6\text{N}$
$m = 3\text{kg}$
$v_0 = 0$
$\alpha = 45°$
$\underline{s = 4\text{m}}$
$A = ?, v = ?$




Rad sile $F$ na putu $s$ je:

$A = F \cdot s \cdot \cos\alpha = 6\text{N} \cdot 4\text{m} \cdot \cos 45° = 17\text{J}$.

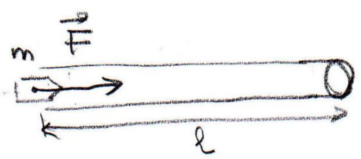
Kako je $A = \Delta E_k = E_{kk} - E_{ko} = E_{kk}$, to je

$A = \dfrac{m \cdot v^2}{2}$ pa je $v = \sqrt{\dfrac{2A}{m}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 17}{3}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}} = 3{,}4\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

6.4. Metak mase 100g ispaljen je iz puške čija cev ima dužinu 0,6m. Predpostaviti da je koordinatni početak ose duž koje merimo položaj metka u tački sa koje metak počinje da se kreće, sila kojim eksplozivni gas deluje na metak u smeru $x$ ose može se izraziti izrazom $15000 + 10000x - 25000x^2$; $x$ je dato u m a sila u N. Odrediti rad koji eksplozivni gas izvrši pri ispaljivanju metka kroz cev puške.

✍

$m = 100\text{g}$
$l = 0{,}6\text{ m}$
$\underline{F = (15000 + 10000x - 25000x^2)\text{N}}$
$A = ?$




Zapaziti, koeficijenti u izrazu za silu su 15000N, 10000N/m, 25000N/m$^2$. Rad računamo iz izraza $A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, gde je $dr=dx$, pa je $A = \int_{x=0}^{x=0{,}6\text{m}} (15000\text{N} + 10000x\text{N/m} - 25000x^2\ \text{N/m}^2) \cdot dx$

$$A = 15\cdot10^3\,\mathrm{N}\cdot x + \frac{10\cdot10^3}{2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\,x^2 - \frac{25\cdot10^3}{3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,x^3\,\Big|_0^{0,6\mathrm{m}} = (9+1{,}8-1{,}08)\cdot10^3\,\mathrm{Nm}$$

Rešenje integrala u datim granicama je $A = 9{,}7\mathrm{kJ}$ ( $A = \int_{x=0}^{x}(A + Bx + Cx^2)\cdot dx = Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3}$ )

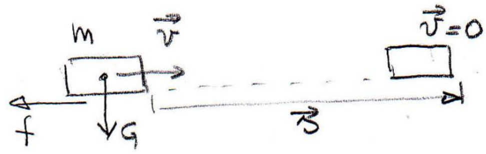
6.5. Kamion, mase 3 t, kreće se brzinom 45 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kolika mora biti sila kočenja da bi se kamion zaustavio posle pređenih 50 m?

✍

$m = 3\mathrm{t}$

$v = 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 45\,\frac{10^3\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 12{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$s = 50\,\mathrm{m}$




Sila kočenja vrši negativan rad na putu $s$ jer je ugao koji zaklapa sa pravcem i smerom kretanja 180°, pa je $A = \vec{F}\cdot\vec{s} = Fs\cos180° = -Fs$. Kako je $A = \Delta E_k = E_{kk} - E_{ko} = -E_{ko}$, a $E_{ko} = \frac{mv_0^2}{2}$ to je $-F\cdot s = -\frac{mv_0^2}{2}$, odnosno $F = \frac{mv_0^2}{2s} = \frac{3\cdot10^3\cdot12{,}5^2}{2\cdot50}\,\mathrm{N} = 4{,}7\,\mathrm{kN}$

6.6. Boing 747 ima masu 220 t. Izračunati njegovu mehaničku energiju u slučaju kada leti na visini 6 km, brzinom 950 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

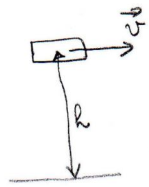
✍

$m = 220\,\mathrm{t} = 220\cdot10^3\,\mathrm{kg}$

$h = 6\,\mathrm{km} = 6\cdot10^3\mathrm{m}$

$v = 950\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 264\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$E = ?$




Mehanička energija aviona je

$$E = E_k + E_p = \frac{m\cdot v^2}{2} + m\cdot g\cdot h$$

$$E = \left(\frac{220\cdot10^3\cdot264^2}{2} + 220\cdot10^3\cdot9{,}81\cdot6\cdot10^3\right)\mathrm{J}$$

$$E = 7{,}7\cdot10^9\,\mathrm{J} + 13\cdot10^9\,\mathrm{J} = 20{,}7\,\mathrm{GJ}.$$

6.7. Snaga Viktorijanskih vodopada na reci Zambezi je $P$ = 1,8 GW. Poznato je da svake minute voda, zapremine $V$ = 100000 m$^3$, pada niz taj vodopad. Kolika je visina Viktorijanskih vodopada?

Gustina vode je $\rho = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

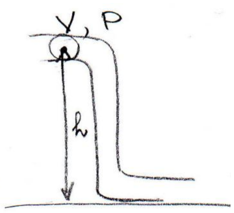
✍

$P = 1{,}8\,\mathrm{GW} = 1{,}8\cdot10^9\,\mathrm{W}$

$\Delta t = 1\mathrm{min}$

$V = 100000\,\mathrm{m}^3 = 10^5\,\mathrm{m}^3$

$h = ?$




Snaga Viktorijanskih vodopada meri se potencijalnom energijom vode na visini $h$ u jedinici vremena, $P = \frac{A}{t} = \frac{m\cdot g\cdot h}{t}$. Kako je $m = \rho\cdot V$ to je $P = \rho\cdot\frac{V}{t}\cdot g\cdot h$, odnosno,

$$h = \frac{P\cdot t}{\rho\cdot V\cdot g} = 108\,\mathrm{m}.$$

6.8. Za koliko vremena mašina snage $P$ = 60 W izvrši rad $A_k$ = 5,4 kJ, ako je stepen korisnog dejstva mašine $\eta$ = 0,9?

✍

$P = 60\,\mathrm{W}$

$A_k = 5{,}4\,\mathrm{kJ} = 5{,}4\cdot 10^3\,\mathrm{J}$

$\eta = 0{,}9$

$t = ?$

Na osnovu definicije stepena korisnog dejstva, $\eta = \dfrac{A_k}{A} = \dfrac{P_k}{P}$ korisna snaga mašine je $P_k = \eta\, P$, pa kako je $P_k = \dfrac{A_k}{t}$ to je traženo vreme

$$t = \frac{A_k}{\eta\, P} = \frac{5{,}4\cdot 10^3}{0{,}9\cdot 60}\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{s}.$$

6.9. Telo mase, $m$ = 200 g, ima impuls $p = 2\ \mathrm{kg}\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Odrediti kinetičku energiju tela.

✍

$m = 200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$

$p = 2\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$E_k = ?$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{m} = \frac{m^2v^2}{2}\cdot\frac{1}{m} = \frac{p^2}{2m}$$

$p = mv$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{2^2}{2\cdot 0{,}2}\,\mathrm{J} = 10\,\mathrm{J}$$

6.10. Pri podizanju mesinganog bloka zapremine $V$ = 0,5 m$^3$, utroši se rad $A$ = 50·10$^4$ J. Izračunati visinu na koju je podignut blok, ako je gustina mesinga $\rho$ = 8500 kg/m$^3$.

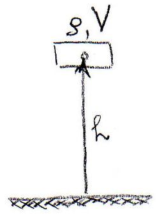
✍

$V = 0{,}5\,\mathrm{m}^3$

$A = 50\cdot 10^4\,\mathrm{J}$

$\rho = 8500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$h = ?$




$m = \rho V = 8500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}^3 = 4250\,\mathrm{kg}$

$A = mgh$

$$h = \frac{A}{mg} = \frac{50\cdot 10^4\,\mathrm{J}}{4250\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 11{,}9\,\mathrm{m} \approx 12\,\mathrm{m}$$

6.11. Čovek, mase $m$ = 80 kg, popne se uz stepenice na visinu od $h$ = 5 m. Koliko energije pri tom utroši i koliku snagu razvija, ako se popne za 10 s ?

✍

$m = 80\,\mathrm{kg}$

$h = 5\,\mathrm{m}$

$t = 10\,\mathrm{s}$

$E = ?\quad P = ?$

$E = mgh = 80\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 5\,\mathrm{m} = 4000\,\mathrm{N\cdot m} = 4\cdot 10^3\,\mathrm{J} = 4\,\mathrm{kJ}$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{4\cdot 10^3\,\mathrm{J}}{10\,\mathrm{s}} = 0{,}4\cdot 10^3\,\mathrm{W} = 0{,}4\,\mathrm{kW}$$

6.12. Motor neke dizalice ima snagu $P$ = 10 kW. Koliki teret dizalica može da podigne na visinu $h$ =10 m, za vreme $t$ = 1min.

✍

$P = 10\,\mathrm{kW}$
$h = 10\,\mathrm{m}$
$t = 1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$
$m = ?$

$E = mgh$

$P = \frac{E}{t} = \frac{mgh}{t}$

$$m = \frac{P \cdot t}{gh} = \frac{\cancel{10} \cdot 10^3\,\mathrm{W} \cdot 6\cancel{0}\,\mathrm{s}}{\cancel{10}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\cancel{0}\,\mathrm{m}} = 6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}\,\cancel{\mathrm{s}}}{\cancel{\mathrm{s}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}} =$$

$$m = 6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N} \cdot \cancel{\mathrm{m}}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \cancel{\mathrm{m}}} = 6 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg} \cdot \cancel{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}{\cancel{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$$

$$m = 6 \cdot 10^6\,\mathrm{g} = 6\,\mathrm{Mg} = 6\,\mathrm{t}$$

6.13. Mesečni račun za struju prikazan je u kilovat-časovima. Izračunati koliko energije u džulima se dobije kupovinom jednog kilovat-časa električne energije.

✍(1 kWh = $10^3$ Wh = $3{,}6 \cdot 10^6$ Ws = $3{,}6 \cdot 10^6$ J = 3,6 MJ)

6.14. Napon između dve tačke u električnom polju je $U$=200 V. Koliki se rad izvrši premeštanjem naelektrisanja od 0,6 C iz jedne u drugu tačku?

✍

$U = 200\,\mathrm{V}$
$q = 0{,}6\,\mathrm{C}$
$A = ?$

$U = \frac{A}{q}$

$A = U \cdot q = 200\,\mathrm{V} \cdot 0{,}6\,\mathrm{C} = 120\,\mathrm{J}$

# 7. Mehanika neprekidnih sredina

## *Hidrostatika*

7.1. Izračunati pritisak kojim dejstvuje čovek na tlo, mase $m$ = 80 kg, ako je površina đonova njegovih cipela $S$ = 250 cm$^2$.

✍

$m = 80\,\mathrm{kg}$
$S = 250\,\mathrm{cm}^2$
$p = ?$

Na osnovu definicije pritiska je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{80\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{250 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = \frac{80 \cdot 9{,}81}{250 \cdot 10^{-4}}\,\mathrm{Pa}, \quad p = 3{,}1 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}.$$

7.2. Na kojoj dubini u vodi je hidrostatički pritisak jednak atmosferskom pritisku? Uzeti da je atmosferski pritisak $10^5$ Pa. Gustina vode je $10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, a $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ .

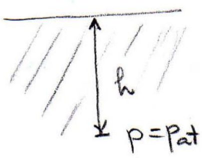
✍

$P_{at} = 10^5\,\mathrm{Pa} = 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 10^5 \frac{\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2} = 10^5\,\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-2}}$

$\rho = 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

$g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

$h = ?$



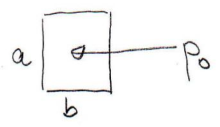

$p = \rho \cdot g \cdot h,$

$h = \frac{p}{\rho \cdot g}$

$$h = \frac{10^5\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}^{-1}\,\cancel{\mathrm{s}^{-2}}}{10^3\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}^{-3} \cdot 10\,\mathrm{m}\,\cancel{\mathrm{s}^{-2}}} = 10\,\mathrm{m}$$

7.3. Izračunati silu kojom atmosfera dejstvuje na jednu stranu prozorskog stakla, dimenzija 1,20 m x 0,90 m. Uzeti da je atmosferski pritisak $p_0 \approx 10^5$ Pa.

✍




$p_0 \approx 10^5\,\mathrm{Pa}$

$a \times b = 1{,}20\,\mathrm{m} \times 0{,}90\,\mathrm{m}$

$F = ?$

$S = a \cdot b = 1{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}90\,\mathrm{m}$

$F = p \cdot S = 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\cancel{\mathrm{m}^2}} \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}90\,\cancel{\mathrm{m}^2}$

$F = 1{,}08 \cdot 10^5\,\mathrm{N} = 108 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$

$F = 108\,\mathrm{kN}$

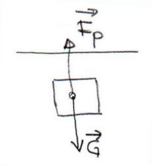
7.4. Kocka, ivice $a$ = 10 cm, potpuno je potopljena u vodi. Kolika sila potiska dejstvuje na nju? Gustina vode je $1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

✍

$a = 10\,\mathrm{cm} = 10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 10^{-1}\,\mathrm{m}$

$\rho = 1\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 1\,\frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(10^{-2}\,\mathrm{m})^3} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$F_p = ?$




$F_p = \rho g V = \rho g a^3 = 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\cancel{\mathrm{m}^3}} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3} = 10\,\mathrm{N}$

7.5. Krvni pritisak žirafe je za $\Delta p \approx 18700$ Pa veći kada žirafa stoji, nego kad leži. Kolika je visina žirafe? Smatrati da je njena visina kada leži $h_1$ = 1,8 m, a da je gustina krvi jednaka gustini vode $10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

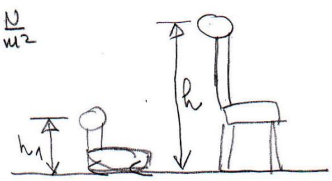
✍

$\Delta p = 18700\,\mathrm{Pa} = 1{,}87 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

$h_1 = 1{,}8\,\mathrm{m}$

$\rho = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$h = ?$




$p_1 = \rho g h_1$ ; $p_2 = \rho g h$

$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h - \rho g h_1 \Rightarrow$

$\rho g h = \Delta p + \rho g h_1$

$h = \frac{\Delta p + \rho g h_1}{\rho g} = \frac{1{,}87 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} + 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\cancel{\mathrm{m}^3}} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1{,}8\,\cancel{\mathrm{m}}}{10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = (1{,}87 + 1{,}8)\,\frac{\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{\cancel{\mathrm{m}^2}}}{\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{\cancel{\mathrm{m}^3}}} \Rightarrow$

$h = 3{,}67\,\mathrm{m} = 3{,}7\,\mathrm{m}$

7.6. Telo pliva na površini vode tako da je $\frac{1}{4}$ njegove zapremine iznad površine. Kolika je gustina materijala od koga je izrađeno telo? Gustina vode je $\rho_v = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

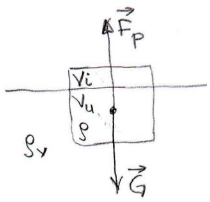
✍

$V_i = \frac{1}{4} V$

$V_u = \frac{3}{4} V$

$\rho_v = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$\rho = ?$




$F_p = G$

$F_p = \rho_v g V_u = \rho_v g \frac{3}{4} V$

$G = \rho g V$

$V = V_u + V_i$

$\rightarrow \rho_v g \frac{3}{4} V = \rho g V$

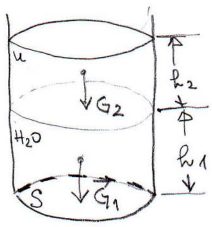
$\rho = \frac{3}{4} \rho_v = \frac{3}{4} \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 750\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

7.7. U cilindričnom sudu čije dno ima površinu $S$ = 320 cm$^2$ nalazi se voda visine stuba $h_1$= 20 cm a iznad nje nalazi se ulje visine stuba $h_2$ = 15 cm. Izračunati:
a) pritisak na dno suda,
b) silu koja deluje na dno suda,
ako je gustina ulja $\rho$ = 820 kg/m$^3$, $\rho_{H_2O} = 1 g/cm^3$ , $g$ = 10ms$^{-2}$;

✍

$S = 320\ cm^2$
$h_1 = 20\ cm$
$h_2 = 15\ cm$
$\rho_2 = 820\ \frac{kg}{m^3}$
$\rho_1 = \rho_{H_2O} = 1\frac{g}{cm^3} = 1\frac{10^{-3}kg}{(10^{-2}m)^3} = \frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$
$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$p = ?$
$F = ?$




$G = m \cdot g = \rho V \cdot g$
$V = S \cdot h$

$F = G_1 + G_2$ ; $G_1 = \rho_1 V_1 g = \rho_1 S h_1 g$ ; $G_2 = \rho_2 g V_2 = \rho_2 g S h_2$ ili

$p = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = 10^3\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 20 \cdot 10^{-2} m + 820\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 15 \cdot 10^{-2} m =$
$= (20 + 0{,}82 \cdot 15) \cdot 10^2 \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2} m = 32{,}3 \cdot 10^2 \frac{N}{m^2} = 3{,}23 \cdot 10^3 Pa = 3{,}23\ kPa$

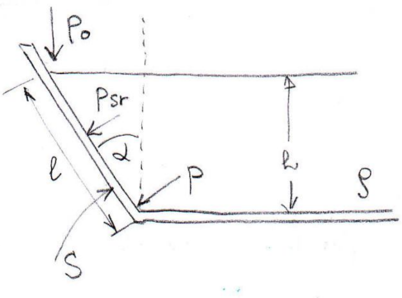
$F = p \cdot S = 3{,}23 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \cdot 320 \cdot (10^{-2}m)^2 = 1033 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \frac{N}{\cancel{m^2}} \cdot \cancel{m^2} = 103\ N$

7.8. Nivo vode u sudu nalazi se na visini od 4 m. Bočni zid suda je širok 3 m a nagnut je pod uglom od 30° u odnosu na vertikalu. Izračunati silu kojom voda deluje na bočni zid suda. Atmosferski pritisak je 10$^5$Pa. Gustina vode je 1 g/cm$^3$ a ubrzanje zemljine teže 10 m/s$^2$. (cos 30°=0,8; cos 60°=0,5)

✍

$h = 4m$
$a = 3m$
$\alpha = 30°$
$\rho = 10^3\frac{kg}{m^3}$
$p_0 = 1 \cdot 10^5 Pa$

$F = ?$




$p = p_0 + \rho g h$
$p_{sr} = \frac{p + p_0}{2} = \frac{p_0 + \rho g h + p_0}{2} = \frac{2p_0 + \rho g h}{2}$
$p_{sr} = p_0 + \frac{\rho g h}{2}$ pritisak linearno raste duž zida
$S = \ell \cdot a$ $\cos\alpha = \frac{h}{\ell}$ $\ell = \frac{h}{\cos\alpha}$
$S = \frac{h \cdot a}{\cos\alpha}$

sila pritiska
$F = p_{sr} \cdot S = \left(p_0 + \frac{\rho g h}{2}\right) \cdot \frac{h \cdot a}{\cos\alpha} = \left(1 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} + \frac{10^3\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 4m}{2}\right) \cdot \frac{4m \cdot 3m}{\cos 30°} = (10 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4)\frac{N}{m^2} \cdot \frac{12m^2}{0{,}86} =$
$F = 12 \cdot 10^4 \cdot \frac{12}{0{,}86}\ N = 167 \cdot 10^4 N = 1{,}6 \cdot 10^6 N = 1{,}6\ MN = 1{,}6 \cdot 10^3\ kN$

7.9. Rezervoar sfernog oblika ispunjen je vodom. Na bočnoj strani rezervoara montiran je otvoren živin manometar. Odredi pritisak vode u težištu *T* rezervoara, ako je visina težišta iznad dodirne površine vode i žive u kraku manometra $h_1$ = 1,2 m, a visina živinog stuba u desnom kraku manometra iznad iste površine $h_2$ = 2,5 m, (gustina žive je 13,6 g/cm$^3$).

✍

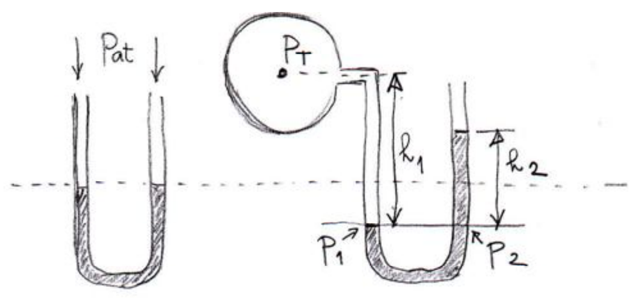
$p_T = ?$

$h_1 = 1{,}2\,m$

$h_2 = 2{,}5\,m$

$\rho_2 = 13{,}6 \frac{g}{cm^3} = 13{,}6 \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-6}\,m^3} = 13{,}6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$

$\rho_1 = 10^3 \frac{kg}{m^3}$




$$p_1 = p_2$$
$$p_1 = p_T + \rho_v g h_1$$
$$p_2 = \rho_{Hg} g h_2 + p_{at}$$

$$p_T + \rho_v g h_1 = \rho_{Hg} g h_1 + p_{at}$$
$$p_T = \rho_{Hg} g h_1 + p_{at} - \rho_v g h_1 = 4{,}28 \cdot 10^5 \text{Pa}$$

7.10. Površine klipova hidraulične prese odnose se kao 1:100. Odrediti silu koja dejstvuje na veliki klip i visinu za koju se taj klip podigao, ako se spuštanjem malog klipa za 0,5 m, izvrši rad od 100 J.

✍

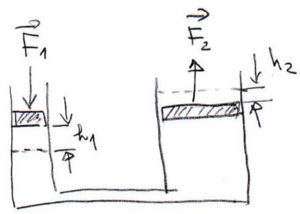
$S_1 : S_2 = 1 : 100$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{100}$

$h_1 = 0{,}5\,m$

$A_1 = 100\,J$

$F_2 = ?$




$$E = \text{const}, \quad A_1 = A_2, \quad p_1 = p_2, \quad V_1 = V_2 \Rightarrow$$

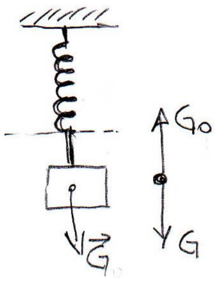
$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \qquad F_1 = \frac{A_1}{h_1} \quad \Rightarrow \quad F_2 = .....$$

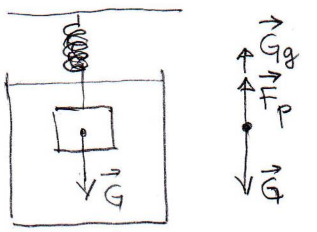
$$h_2 = \frac{A_2}{F_2} = 0{,}5\text{cm}$$

7.11. Komad bakra težak je u vazduhu 3,56·10$^{-4}$ N, a u glicerinu 3,06·10$^{-4}$ N. Odrediti gustinu bakra, ako je gustina glicerina 1,26·10$^3$ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

✍

$$G_0 = 3{,}56 \cdot 10^{-4} N$$
$$G_g = 3{,}06 \cdot 10^{-4} N$$
$$\rho_g = 1{,}26 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$
$$\rho_b = ?$$



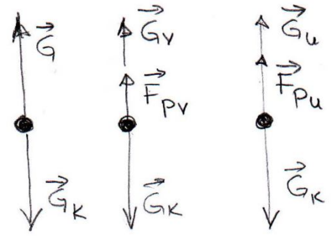

Komad bakra u glicerinu gubi prividno težinu za vrednost sile potiska glicerina, pa je $G_0 - G_g = F_p$. Kako je $F_p = \rho_g \cdot V \cdot g$, gde je $V$ zapremina tela, to je $G_0 - G_g = \rho_g \cdot V \cdot g$. Iz poslednje jednačine zapremina tela je $V = \frac{G_0 - G_g}{\rho_g \cdot g}$. Kako je težina tela u vazduhu $G_0 = \rho_b V_g g$, to je gustina bakra

$$\rho_b = \frac{G_0}{V \cdot g} = \frac{G_0}{\dfrac{G_0 - G_g}{\rho_g \cdot g} \cdot g} \quad \text{odnosno,} \quad \rho_b = \frac{G_0}{G_0 - G_g} \cdot \rho_g$$

$$\rho_b = \frac{3{,}56 \cdot 10^{-4}}{3{,}56 \cdot 10^{-4} - 3{,}06 \cdot 10^{-4}} \cdot 1{,}26 \cdot 10^3 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8{,}97 \cdot 10^3 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

7.12. Kamen je težak u vakumu 200 N, u vodi 120 N, a u ulju 130 N. Odrediti specifičnu težinu kamena i ulja.

✍ $G = 200\text{N}$
$G_v = 120\text{N}$
$G_u = 130\text{N}$
$\gamma = ?$
$\gamma_u = ?$

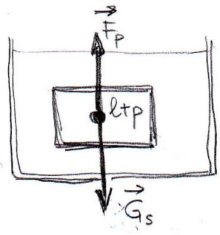



$$F_{pv} = G - G_v = \gamma_v V, \qquad V = \frac{G - G_v}{\gamma_v} = 8\text{dm}^3, \qquad \gamma = \frac{G}{V} = 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$F_{pu} = G - G_u = \gamma_u V, \qquad \gamma_u = \frac{G - G_u}{\gamma_u} = 8{,}75 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}$$

7.13. Spoj napravljen od plute i neke legure lebdi u vodi. Zapreminski odnos legure i plute u spoju je 1:5. Odrediti specifičnu težinu legure, ako se zna da je specifična težina plute 2 N/dm$^3$.

✍ $F_p = G_s$
$V_l : V_p = 1:5$
$\gamma_p = 2 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}$
$\gamma_l = ?$

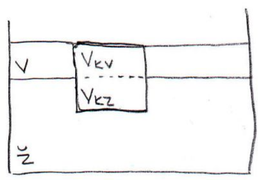



$$\frac{V_l}{V_p} = \frac{1}{5} \qquad G_s = G_p + G_l = F_p \qquad V_s = V_l + V_p$$

$$\gamma_p V_p + \gamma_l V_l = \gamma_v V_s \qquad \gamma_l = 6\gamma_v - 5\gamma_p = 50 \frac{\text{N}}{\text{dm}^3}$$

7.14. Na živi, u nekom sudu, pliva čelična kocka. Zatim se u sud nalije voda sve do gornje ivice kocke. Odrediti koji se deo kocke nalazi u živi a koji u vodi. Specifična težina čelika je 75 N/dm$^3$.

✍





$$\frac{V_{kv}}{V_k} = ? \qquad \frac{V_{kz}}{V_k} = ?$$

$$V_k = V_{kv} + V_{kz}, \qquad G = F_{pv} + F_{pz}, \qquad \gamma_{\sim} V_k = \gamma_v V_{kv} + \gamma_z V_{kz}$$

$$\frac{V_{kz}}{V_k} = \frac{\gamma_{\sim} - \gamma_v}{\gamma_z - \gamma_v} = \frac{65}{126}, \qquad \frac{V_{kv}}{V_k} = \frac{126 - 65}{126} = \frac{61}{126}$$

7.15. Kada se vrši merenje osetljivom analitičkom vagom moraju se učiniti korekcije ako je gustina merenog tela različita od gustine tegova. Koliko iznosi ta korekcija i kolika je korigovana masa drvene kocke gustine 0,4 g/cm$^3$, ako je merenje vršeno mesinganim tegovima mase 20 g i gustine 8 g/cm$^3$: a) na temperaturi od 20°C kada je gustina vazduha 1,3 kg/m$^3$, b) na temperaturi od 30°C?

✍ $\Delta m = ?$

$m_d = ?$

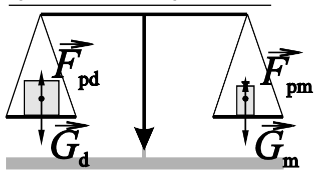
$\rho_d = 0{,}4\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$\rho_m = 8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$m_m = 20\,\text{g}$

$t_a = 20°\text{C} \quad \rho_a = 1{,}3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$t_b = 30°\text{C} \quad \rho_b = ?$

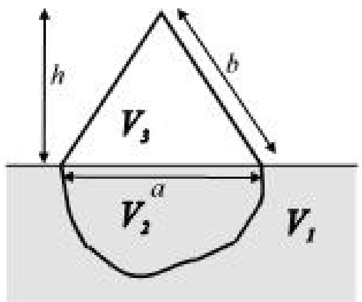



a)
$$M_1 = M_2, \quad F_1 l_1 = F_2 l_2, \quad F_1 = F_2$$
$$F_1 = G_d - F_{pd}, \quad F_2 = G_m - F_{pm}$$
$$m_d g - \rho_a \frac{m_d}{\rho_d} g = m_m g - \rho_a \frac{m_m}{\rho_m} g$$
$$m_d = m_m \frac{1-\frac{\rho_a}{\rho_m}}{1-\frac{\rho_a}{\rho_d}} = 20{,}062\ \text{g}$$

b)
$$\rho_b = \frac{T_a}{T_b}\rho_a = 1{,}257\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$
$$m_d = 20{,}060\ \text{g}$$

7.16. Naći odnos između zapremine leda koja viri iz vode i njegove zapremine uronjene u vodu kada znamo kolika je specifična težina leda. Kolika je celokupna zapremina leda, ako iz vode viri deo koji ima oblik kupe čiji je prečnik baze $a$, a strana $b$?

✍




$$\left.\begin{aligned} G &= V_1\gamma_1 \\ F_p &= V_2\gamma_2 \end{aligned}\right\} \; F_p = G, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad V_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} V_1$$
$$V_3 = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}V_1 = \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)V_1$$
$$r = \frac{a}{2}, \quad h^2 + r^2 = b^2, \quad h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$
$$V_3 = \frac{r^2\pi h}{3}, \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1, \quad V_1 = V_3\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^{-1}$$

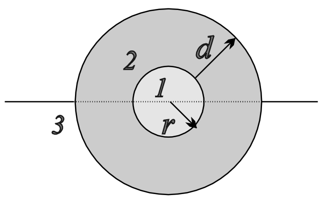
7.17. Da bi kugla od gvožđa ($\rho_1$ = 8 gcm$^{-3}$, poluprečnik $r$ = 10 cm) uronila u vodu do svoje polovine, treba je obložiti slojem plute ($\rho$ = 0,3 gcm$^{-3}$) debljine $d$. Koliko je $d$?

$\rho_1 = 8\ \text{gcm}^{-3}$

$\rho_2 = 0{,}3\ \text{gcm}^{-3}$

$\rho_3 = 1\ \text{gcm}^{-3}$

$r = 10\ \text{cm}$

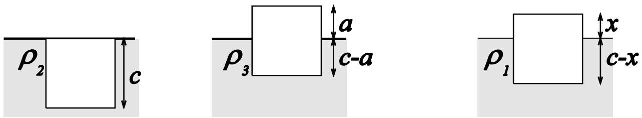



$$G_1 + G_2 = F_p$$
$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 = \rho_3 g \frac{V}{2}$$
$$V = V_1 + V_2; \quad V_1 = \frac{4}{3}r^3\pi;$$
$$V = \frac{4}{3}(r+d)^3\pi$$

$$\rho_1 \frac{4}{3}r^3\pi + \rho_2 \frac{4}{3}(r+d)^3\pi - \rho_2 \frac{4}{3}r^3\pi = $$
$$= \frac{1}{2}\rho_3 \frac{4}{3}(r+d)^3\pi$$
$$(r+d)^3 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)r^3}{\frac{1}{2}\rho_3 - \rho_2}$$
$$d = r\left(\sqrt[3]{2\frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_3 - 2\rho_2}} - 1\right) = 23{,}7\ \text{cm}$$

7.18. Do koje dubine će tonuti kocka u tečnosti gustine $10^3$ kgm$^{-3}$ ako u tečnosti gustine 0,79 gcm$^{-3}$ tone do svoje gornje ivice, a kada se potopi u tečnost gustine 1,27 gcm$^{-3}$ iznad tečnosti ostaje 3,8 cm tela?

✍




$$G = F_p \qquad G = F_{p1} \qquad G = F_{p2}$$

$$F_p = \rho_2 g c^3 \qquad F_{p1} = \rho_3 g(c-a)c^2 \qquad F_{p2} = \rho_1 g(c-x)c^2$$

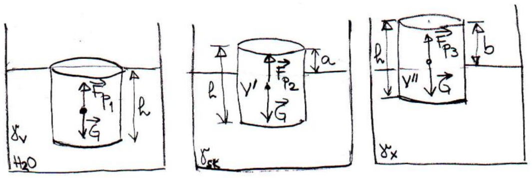
$$\rho_2 g c^3 = \rho_3 g(c-a)c^2$$

$$\rho_2 g c^3 = \rho_1 g(c-x)c^2$$

$$c = \frac{\rho_3 a}{\rho_3 - \rho_2} = 10\text{cm} \qquad x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} c = 2{,}1\text{cm} \qquad c - x = 7{,}9\text{cm}$$

7.19. Valjkasto telo tone u vodi do svoje gornje ivice. Kada se potopi u tečnost specifične težine $15\cdot10^3$ N/m$^3$, iznad tečnosti ostaje 25 cm tela. Kolika treba da je specifična težina tečnosti u kojoj telo tone toliko da iznad tečnosti ostaje 15 cm tela. ( Uzeti da je $g$ = 10 m/s$^2$ )

✍




$\gamma_{sk} = 15\cdot10^3 \frac{N}{m^3}$

$a = 25\,cm$

$b = 15\,cm$

$g = 10\frac{m}{s^2}$

$\rho_v = 1\frac{g}{cm^3} = 10^3\frac{kg}{m^3}$

$\gamma_v = \rho_v \cdot g \Rightarrow$

$\gamma_v = 10^4 \frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2}$

$\gamma_v = 10^4 \frac{N}{m^3}$

$$G = F_p$$

$$F_{p1} = \gamma_v V = \gamma_v Sh$$

$$F_{p2} = \gamma_{sk} V' = \gamma_{sk} S(h-a)$$

$$F_{p3} = \gamma_x V'' = \gamma_x S(h-b)$$

$$G = \gamma_v Sh$$

$$G = \gamma_{sk} S(h-a)$$

$$G = \gamma_x S(h-b)$$

$$\gamma_v Sh = \gamma_{sk} S(h-a)$$

$$\gamma_v Sh = \gamma_x S(h-b)$$

$$\gamma_x = \frac{a\gamma_{sk}\gamma_v}{(a-b)\gamma_{sk} + b\gamma_v} =$$

$$= \frac{25\cdot15\cdot10^3\cdot10^4}{10\cdot15\cdot10^3 + 15\cdot10^4}\cdot\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$\gamma_x = 1{,}25\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

## *Hidrodinamika*

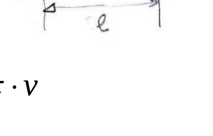
7.20. Koliki je protok vode u cevi poluprečnika 4 cm, ako je njena brzina proticanja 15 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$? Koliko litara vode proteče kroz cev i sekundi?

✍

$r = 4\,cm$

$v = 15\frac{cm}{s}$

$Q = ?$




$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S\cdot l}{\Delta t} = S\cdot v$

$\Delta V = S\cdot l$

$$Q_v = S\cdot v = r^2\pi\cdot v$$

$$Q_v = 0{,}04^2\pi \cdot 0{,}15\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0{,}0007536\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_v = 7{,}5\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 7{,}5\cdot 10^{-1}10^{-3}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0{,}75\frac{\ell}{\text{s}}.$$

7.21. Voda protiče kroz horizontalnu cev promenljivog poprečnog preseka. Kolika je razlika pritisaka vode na mestima gde su površine poprečnih preseka cevi 8 cm$^2$ i 4 cm$^2$? Brzina vode kroz drugi presek je 2 m/s.

✍

$S_1 = 8\,\text{cm}^2$

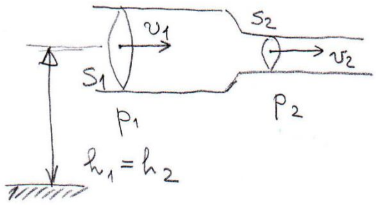
$S_2 = 4\,\text{cm}^2$

$v_2 = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\rho = 1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 1\cdot\frac{10^{-3}\,\text{kg}}{10^{-6}\,\text{m}^3} = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

---

$\Delta p = ?$




$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^{\,2}}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^{\,2}}{2}$$

$$\underline{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \qquad p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - \frac{S_2^2 v_2^2}{S_1^2}\right)$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad v_1 = \frac{S_2 v_2}{S_1}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} v_2^2\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = \frac{1}{\cancel{2}}10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\left(1 - \frac{4^2\,\cancel{\text{cm}^4}}{8^2\,\cancel{\text{cm}^4}}\right) = 2\cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\left(1 - \frac{16}{64}\right) = 2\cdot 10^3\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot(1$$

$$\Delta p = \frac{3}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cdot\cancel{2}\cdot 10^3\,\text{Pa} = 1{,}5\cdot 10^3\,\text{Pa} = 1{,}5\,\text{kPa}$$

7.22. Voda se nalazi u širem zatvorenom rezervoaru i pritisak iznad nje je 0,2 MPa. Kolikom brzinom ističe voda kroz mali otvor koji se nalazi na visini 3 m ispod njenog stalnog nivoa? Spoljašnji pritisak je normalan. Kontrakciju mlaza zanemariti.

✍

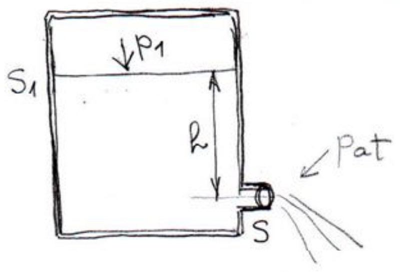
$p_1 = 0{,}2\,\text{MPa} = 0{,}2\cdot 10^6\,\text{Pa} = 0{,}2\cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

$h = 3\,\text{m}$

$P_{at} = 10^5\,\text{Pa} = p$

---

$v = ?$



$$\left.\begin{aligned} S_1:&\quad p_1+\rho g h_1+\frac{\rho v_1^2}{2}\\ S:&\quad p+\rho g h+\frac{\rho v^2}{2}\end{aligned}\right\}\quad p_1+\rho g h_1=p+\frac{\rho v^2}{2}$$

$$v=\sqrt{(p_1-p)\frac{2}{\rho}+2gh_1}=16\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

7.23. Korisna snaga turbine je 6,33 kW. Protok vode kroz turbinu je 0,22 $\mathrm{m^3/s}$. Voda pada sa visine od 4 m. Koliki je stepen iskorišćenja turbine?

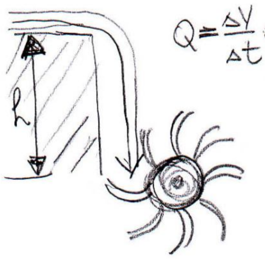
✍

$P_k = 6{,}33\,\mathrm{kW} = 6{,}33\cdot 10^3\,\mathrm{W}$

$Q = 0{,}22\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{s}}$

$h = 4\,\mathrm{m}$

$\eta = ?$




$Q=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V}{t}$

$$P=\frac{A}{t}=\frac{mgh}{t}=\frac{\rho\, Qt\, gh}{t}$$

$$\eta=\frac{P_k}{P}100\,\%=\frac{P_k}{\rho\, Q\, gh}100\,\%=73\,\%$$

7.24. Na horizontalnoj cevi promenljivog poprečnog preseka nalaze se tri uže vertikalne cevi koje služe kao manometri, pokazujući pritisak tečnosti koja struji kroz cev. Kolike će biti visine $h_1$, $h_2$ i $h_3$ vodenih stubova u vertikalnim cevima ako kroz horizontalnu cev stacionarno struji 12 litara vode u sekundi, kada su površine preseka cevi $S_1 = 120\ \mathrm{cm^2}$, $S_2 = 180\ \mathrm{cm^2}$ i $S_3 = 80\ \mathrm{cm^2}$ i ako pritisak vode u preseku $S_1$ iznosi $p_1 = 4$ MPa? ( $p_a = 10^5\,\mathrm{Pa}$ ).

✍ $Q = 12\,\frac{\ell}{\mathrm{s}}$

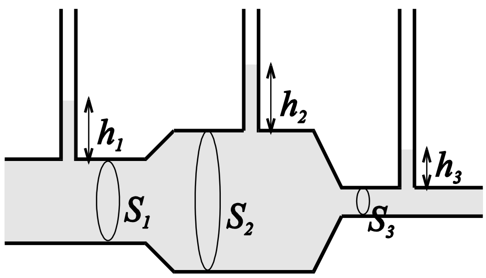
$S_1 = 120\mathrm{cm}^2$

$S_2 = 180\mathrm{cm}^2$

$S_3 = 80\mathrm{cm}^2$

$p_1 = 4$ MPa

$h_i = ?$




Ako je voda u miru onda je kod svih preseka na istoj visini, pritisci su isti.

$$v_1=\frac{Q}{S_1}=1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}};\ v_2=\frac{Q}{S_2}=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

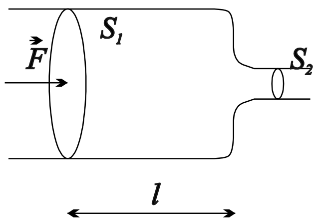
$$v_3=\frac{Q}{S_3}=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$p_2=p_1+\frac{\rho}{2}\left(v_1^2-v_2^2\right)\ ;\ p_3=p_1+\frac{\rho}{2}\left(v_1^2-v_3^2\right);$$

$$p_i=p_a+\rho g h_i\quad ;\quad h_i=\frac{p_i-p_a}{\rho g}$$

7.25. . Poprečni presek klipa u špricu, koji je horizontalno postavljen, je $S_1 = 1{,}2\ \mathrm{cm^2}$, a presek otvora je $S_2 = 2\ \mathrm{mm^2}$. Za koliko će vremena isteći voda iz šprica ako dejstvujemo na klip silom $F = 0{,}5$ daN i ako je hod klipa $l = 4$ cm.

✍




$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\Delta V = \ell S_1$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{F}{S_1}$$

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

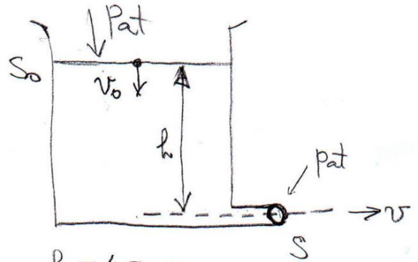
$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{F}{S_1}}{\frac{\rho}{2} - \frac{\rho S_2^2}{2 S_1^2}}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{S_2 v_2} = \frac{\ell S_1}{S_2}\sqrt{\frac{S_1 \rho}{2F}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}$$

$$\Delta t = 0{,}26 \text{ s}$$

7.26. Kolika je teorijska brzina isticanja tečnosti iz otvora suda, koji se nalazi 4,905 m ispod njene površine?

✍




$h = 4{,}905 \text{ m}$

$v = ?$

$$S_0 v_0 = S v$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ p_{at}}}{p_0} + \frac{\rho \underset{v_0 \approx 0}{v_0^2}}{2} + \rho g h = \underset{\substack{\parallel \\ p_{at}}}{p} + \rho g \underset{=0}{\cancel{h}} + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\cancel{\rho} g h = \cancel{\rho}\frac{v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}905}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

7.27. Iz bočnog otvora jednog suda ističe voda kroz horizontalnu cev promenljivog preseka. Nivo vode u sudu je konstantan i nalazi se na visini od 3 m iznad ose bočne cevi koja prolazi kroz središte bočnog otvora. Poluprečnik onog dela horizontalne cevi koji je neposredno montiran na sud iznosi $r_1 = 4$ cm, srednjeg dela je $r_2 = 12$ cm, a krajnjeg dela $r_3 = 6$ cm. Odrediti protok vode kroz horizontalnu cev, i njene srednje brzine i pritiske u pojedinim delovima cevi.

✍

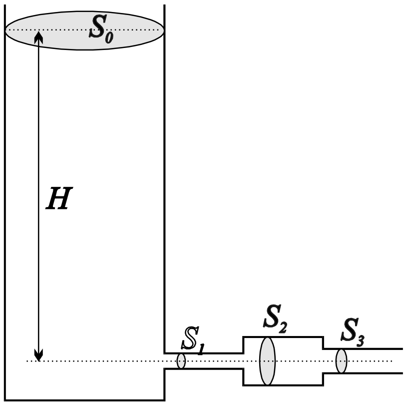
$S_0$ $\quad S_1$ $\quad S_2$ $\quad S_3$

$$\underset{\substack{\parallel \\ p_{at}}}{p_0} + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g H = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{h_1} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{h_2} = \underset{\substack{\parallel \\ p_{at}}}{p_3} + \frac{\rho v_3^2}{2} + \rho g \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{h_3}$$

$v_0 \to 0$

$v_0 \ll v_3$

$$p_{at} + \rho g H = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = p_{at} + \frac{\rho v_3^2}{2}$$




$$p_0 + \frac{\rho\, {v_0}^2}{2} + \rho\, gH = p_3 + \frac{\rho\, {v_3}^2}{2}$$

$$v_0 \ll v_3; \quad v_0 \to 0; \quad p_0 = p_3 = p_{at} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho\, gH = \frac{\rho\, {v_3}^2}{2}$$

$$v_3 = \sqrt{2gH} = 7{,}67\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$Q = S_3 v_3 = \pi\, {r_3}^2 v_3 = 86{,}7\,\ell \mathrm{s^{-1}}$$

$$v_1 = \frac{Q}{S_1} = 17{,}3\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$v_2 = \frac{Q}{S_2} = 1{,}9\ \mathrm{ms^{-1}}$$

$$p_1 + \frac{\rho\, {v_1}^2}{2} = p_3 + \frac{\rho\, {v_3}^2}{2}$$

$$p_1 = p_3 + \tfrac{\rho}{2}\left({v_3}^2 - {v_1}^2\right) = -0{,}167 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$$

Negativan znak pokazuje da je zbog velike brzine u tom delu podpritisak.

$$p_2 + \frac{\rho\, {v_2}^2}{2} = p_3 + \frac{\rho\, {v_3}^2}{2}$$

$$p_2 = p_3 + \tfrac{\rho}{2}\left({v_3}^2 - {v_2}^2\right) = 1{,}33 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$$

7.28. U širokom delu horizontalne cevi voda teče brzinom $8\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$, pri pritisku $14{,}7 \cdot 10^4$ Pa. U užem delu te cevi pritisak je $13{,}3 \cdot 10^4$ Pa. Kolika je brzina u užem delu cevi? Trenje zanemariti.

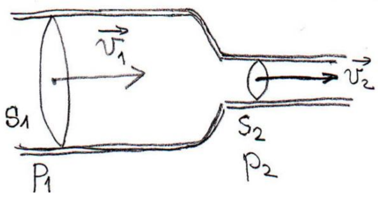
✍

$$v_1 = 8\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 0{,}08\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$p_1 = 14{,}7 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$$

$$p_2 = 13{,}3 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$$

$$v_2 = ?$$




Na osnovu Bernulijeve jednačine za horizontalnu cev je

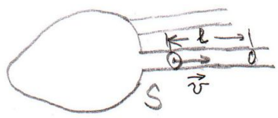
$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \text{ tj. } v_2 = \sqrt{\frac{2\left(p_1 - p_2 + \frac{\rho v_1^2}{2}\right)}{\rho}} = 5{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

7.29. Kada se odmaramo, srce ‘’ispumpava’’ 4,6 dm$^3$ krvi u minuti, a pri velikim naporima 25 dm$^3$ krvi u minuti. Površina otvora aorte je 0,81 cm$^2$. Kolika je brzina krvi: a) kada se odmaramo, b) kada se naprežemo?

✍

$V_1 = 4{,}6\ dm^3$, $\Delta t_1 = 1\ min$ $\Big\}$ $Q_1 = 4{,}6\ \frac{dm^3}{min} = 4{,}6\ \frac{(10^{-1} m)^3}{60 s} = 0{,}077 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$

$V_2 = 25\ dm^3$, $\Delta t_2 = 1\ min$ $\Big\}$ $Q_2 = 25\ \frac{dm^3}{min} = 25\ \frac{(10^{-1} m)^3}{60 s} = 0{,}417 \cdot 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$




$S = 0{,}81\ cm^2 = 0{,}81 \cdot (10^{-2} m)^2 = 0{,}81 \cdot 10^{-4} m^2$

$v_1 = ?\ ;\ v_2 = ?$

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S \cdot l}{\Delta t} = S \cdot v \Rightarrow v = \frac{Q}{S} \Rightarrow v_1 = \frac{Q_1}{S} = \frac{0{,}077 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{0{,}81 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}095 \cdot 10 \frac{m}{s} = 0{,}95 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{S} = \frac{0{,}417 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{0{,}81 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}51 \cdot 10 \frac{m}{s} = 5{,}1 \frac{m}{s}$$

$v_1 = 0{,}95\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $v_2 = 5{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

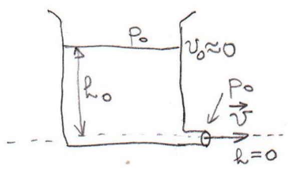
7.30 Koliko $m^3$ vode ističe u jednoj minuti iz rezervoara kroz otvor poluprečnika 4 cm, koji se nalazi 4,9 m ispod gornjeg nivoa vode?

✍

$[V] = m^3$, $[t] = min$ $\Big\}$ $Q = \frac{V}{t} = ?$

$r = 4\ cm = 4 \cdot 10^{-2}\ m$

$h_0 = 4{,}9\ m$




$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v\ ;\ S = r^2 \pi$

$p_0 + \rho g h_0 + \underbrace{\frac{\rho v_0^2}{2}}_{=0} = p_0 + \frac{\rho v^2}{2} + \underbrace{\rho g h}_{=0}$

$\rho g h_0 = \frac{\rho v^2}{2}$

$v = \sqrt{2 g h_0}$

$Q = S \cdot v = r^2 \pi \cdot \sqrt{2 g h_0}$

$Q = (4 \cdot 10^{-2} m)^2 \cdot \pi \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 4{,}9 m} = 16 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{98 \frac{m^2}{s^2}}$

$Q = 16 \cdot 9{,}9 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-4} \cdot m^2 \cdot \frac{m}{s} = 497 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{s}$

$1 min = 60 s$

$1 s = \frac{1 min}{60}$

$Q = \frac{497 \cdot 10^{-4} m^3}{\frac{1 min}{60}} = 2{,}9 \frac{m^3}{min}$

7.31. Protok tečnosti možemo da merimo pomoću naprave prikazane na slici. Kroz cev promenljivog poprečnog preseka teče voda. Površina poprečnog preseka u užem delu je $S_1$ = 5 $cm^2$, a u širem $S_2$ = 10 $cm^2$. Na užem i širem delu su ugrađene vertikalne manometarske cevčice, jednakih poprečnih preseka. Razlika nivoa vode u njima je $\Delta h$ = 10 cm. Koliki je maseni protok kroz cev? Gustina vode je $10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

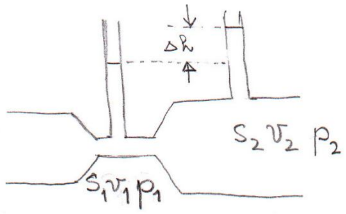
✍ $S_1 = 5\ \text{cm}^2 = 5\cdot(10^{-2}\ \text{m})^2 = 5\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$

$S_2 = 10\ \text{cm}^2 = 10\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$

$\Delta h = 10\ \text{cm} = 10\ 10^{-2}\ \text{m} = 10^{-1}\ \text{m}$

$\rho = 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$Q_m = ?$




$S_1 < S_2$, $v_1 > v_2$ i $p_1 < p_2$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 v_1 = S_2 v_2 \\ p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} v_1 = v_2\frac{S_2}{S_1} \\ \Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \end{array}$$

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_2^2 \frac{S_2^2}{S_1^2} - \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho\cdot V}{\Delta t} = \frac{\rho\cdot S\cdot \Delta l}{\Delta t} = \rho S v$$

$$Q_{1m} = Q_{2m} = const$$

$$\Delta p = \frac{\rho v_2^2}{2}\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right) \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right)}}\ ;\ \Delta p = \rho g \Delta h$$

$$Q_m = \rho\cdot S_2 v_2 = \rho\cdot S_2 \sqrt{\frac{2\cancel{\rho} g\Delta h}{\cancel{\rho}\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right)}} = \rho S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1}}$$

$$Q_m = 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 \sqrt{\frac{2\cdot 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 10^{-1}\ \text{m}}{\frac{100\cdot 10^{-8}\ \text{m}^4}{25\cdot 10^{-8}\ \text{m}^4} - 1}} = \sqrt{\frac{2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{4-1}}\cdot\frac{\text{kg}}{\text{m}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{\text{kg}}{\text{m}} = 0{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$Q_m = 0{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

## *Površinski napon i viskoznost*

7.32. Visina stuba alkohola u kapilarnoj cevi je $h_a = 55$ mm. U istoj kapilarnoj cevi, visina vodenog stuba je $h_v = 146$ mm. Kolika je gustina alkohola? $\gamma_a = 0{,}022\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $\gamma_v = 0{,}073\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

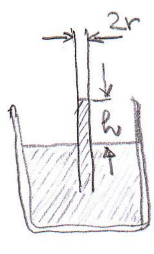
✍ $h_a = 55$ mm

$h_v = 146$ mm

$\gamma_a = 0{,}022\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$\gamma_\upsilon = 0{,}073\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

$\rho_a = ?$




$F = G$

$\gamma l = mg$

$\gamma 2r\pi = \rho V\cdot g = \rho h\cdot S\cdot g = \rho h r^2\pi g$

$\gamma 2\cancel{r}\cancel{\pi} = \rho h r^{\cancel{2}}\cancel{\pi} g$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Visina tečnosti u kapilari računa se po formuli $h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$, pa kada tu formulu primenimo na obe tečnosti, dobijamo $h_a = \frac{2 \cdot \gamma_a}{\rho_a g \cdot r}$ i $h_v = \frac{2 \cdot \gamma_v}{\rho_v \cdot g \cdot r}$. Deobom dobijamo: $\frac{h_a}{h_v} = \frac{\rho_v \cdot \gamma_a}{\rho_a \cdot \gamma_v}$, pa je tražena gustina alkohola $\rho_a = \frac{\gamma_a}{\gamma_v}\frac{h_v}{h_a} \cdot \rho_v = \frac{0{,}022}{0{,}073} \cdot \frac{146}{55} \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 0{,}8 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

7.33. Koliki je prečnik najveće pore (šupljine) u fitilju špiritusne lampe ako se špiritus podiže do vrha fitilja? Vrh fitilja nalazi se na visini $h$ = 0,10 m, iznad špiritusa u lampi. Pore fitilja smatrati kapilarama, a kvašenje potpunim. Konstanta površinskog napona iznosi $\gamma = 0{,}03 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, a gustina $\rho = 800 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

✍ $h = 0{,}10$ m

$\gamma = 0{,}03 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$,

$\rho = 800 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$d = ?$

Iz relacije za visinu tečnosti u kapilarnoj cevi, $h = \frac{4 \cdot \gamma}{\rho \cdot d \cdot g}$, gde je $\gamma$ - konstanta površinskog napona, $\rho$ - gustina tečnosti, $d$ – prečnik kapilare, a $g$ - ubrzanje Zemljine teže, može se naći prečnik;

$$d = \frac{4 \cdot \gamma}{\rho \cdot h \cdot g} = \frac{4 \cdot 0{,}030}{800 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81} \mathrm{m} = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}$$

7.34. Vertikalno postavljena kapilarna cev, unutrašnjeg prečnika $d$ = 0,8 mm, uronjena je jednim krajem u sud sa alkoholom. Odrediti masu alkohola u kapilari iznad nivoa alkohola u sudu. Konstanta površinskog napona alkohola iznosi $\gamma = 0{,}0208 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

✍ $d = 0{,}8 \ \mathrm{mm} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{m}$

$\gamma = 0{,}0208 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

$m = ?$

$F_p = G$; $\gamma l = mg$;

$$m = \frac{\pi \cdot d \cdot \gamma}{g},$$

$$m = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0208}{9{,}81} \ \mathrm{kg} = 5{,}33 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{kg}.$$

7.35. Ako je koeficijent viskoznosti vazduha $\eta$ = 13,4 μPa·s, izračunati prečnik kišne kapi koja pada stalnom brzinom $v = 0{,}5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

✍ $\eta = 13{,}4 \ \mu\mathrm{Pa \cdot s}$

$v = 0{,}5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$d = ?$

Pošto je brzina kretanja kapi konstantna, onda je ubrzanje kapljice $a = 0$, to znači da su u ravnoteži sve sile koje na nju deluju, a to su sila teže $G = mg$, i sila viskoznog trenja $F_{tr} = 6\pi\eta r v$ (sila potiska vazduha je mala pa se zanemaruje), pa je

$mg = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$. Kako je masa kapi $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3$,

zamenom u prethodni izraz, dobijamo $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3 g = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$,

odakle je, $r = 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta v}{2\rho g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{13{,}4 \cdot 10^{-6} 0{,}5}{2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}} \mathrm{m} = 5{,}5 \cdot 10^{-5} \mathrm{m}$.

Dakle, prečnik kapi je $d = 2 \cdot r = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$m.

7.36. Kolika je razlika nivoa $\Delta h$ u kapilarama, prečnika $d_1$ = 0,1 mm i $d_2$ = 0,3 mm, ako je konstanta površinskog napona $\gamma = 70\cdot10^{-3}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$, a gustina $\rho = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ?

✍ $\Delta h = ?$

$d_1 = 0{,}1\,\text{mm} = 0{,}1\,10^{-3}\,\text{m}$

$d_2 = 0{,}3\,\text{mm} = 0{,}3\cdot10^{-3}\,\text{m}$

$\gamma = 70\cdot10^{-3}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$

$\rho = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} \Rightarrow h_1 = \frac{2\gamma}{\rho g r_1} \text{ i } h_2 = \frac{2\gamma}{\rho g r_2}$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\gamma}{\rho g r_2} - \frac{2\gamma}{\rho g r_1} = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

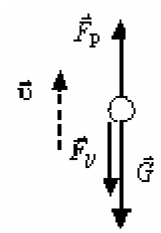
$$\Delta h = \frac{2\cdot70\cdot10^{-3}\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}{10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\left(\frac{1}{0{,}15\cdot10^{-3}\,\text{m}} - \frac{1}{0{,}05\cdot10^{-3}\,\text{m}}\right) = \frac{\text{m}}{1}$$

$$\Delta h = 140\cdot10^{-4}\,\text{m}\quad(667 - 20) =$$

$$\Delta h = 140\cdot13{,}3\cdot10^{-4}\,\text{m} = 1866\,10^{-4}\,\text{m} \cong 1900\cdot10^{-2}\cdot10^{-2}\,\text{m}$$

$$\Delta h = 19\cdot10^{-2}\,\text{m} = 19\,\text{cm}$$

7.37. Drvena loptica spontano isplivava ka slobodnoj površini vode stalnom brzinom $v = 0{,}75\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Koeficijent viskoznosti vode je $\eta = 0{,}8\,\text{mPa}\cdot\text{s}$, a gustina drveta $\rho = 800\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Koliki je poluprečnik loptice?




✍ Pošto se loptica kreće ravnomerno, to su u ravnoteži sve tri sile koje na nju deluju: sila zemljine teže $mg$; sila viskoznog trenja (Stoksova sila) $6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v$ i sila potiska (Arhimedova sila) $\rho_0\cdot g\cdot V$. Dakle, $mg + 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v = \rho_0\, g\cdot V$,

gde je zapremina loptice $V = \frac{4}{3}\pi\cdot r^3$, $\rho_0$ – gustina vode, a masa kuglice

$m = \rho\frac{4}{3}\pi\, r^3$, pa zamenom u prethodnu relaciju, dobijamo

$\frac{4}{3}\pi\cdot\rho\cdot r^3\,\text{g} + 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot rv = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\rho\cdot r^3\,\text{g}$. Kad pomnožimo ovaj izraz sa $\frac{3}{4\cdot\pi\cdot r}$,

dobijamo $\rho\, r^2 g + \frac{18}{4}\eta v = \rho_0 r^2\, g$, odakle je $\rho_0 r^2\, g - \rho r^2 g = \frac{9}{2}\eta v$ tj.

$(\rho_0 - \rho)r^2 g = \frac{9}{2}\eta v$, pa je traženi poluprečnik loptice

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v}{2g(\rho_0 - \rho)}} = \sqrt{\frac{9\cdot0{,}8\cdot10^{-3}\cdot0{,}75}{2\cdot9{,}81(10^3 - 800)}}\ \text{m} = 1{,}17\cdot10^{-3}\ \text{m}.$$

7.38. Dve kuglice, istih poluprečnika ($r$ = 2 mm), potopljene su u glicerin. Jedna je od drveta, gustine $\rho_d = 900\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, dok je druga od aluminijuma, gustine $\rho_{Al} = 2700\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. U početnom trenutku se kuglice kreću ravnomernim brzinama. Odrediti brzine kretanja kuglica kroz glicerin. Koeficijent viskoznosti glicerina iznosi $\eta = 0{,}8\,\text{Pa}\cdot\text{s}$, a gustina glicerina $\rho_g = 1270\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

✍

$r$ = 2 mm

Na kuglice u glicerinu dejstvuje sila Zemljine teže, sila potiska glicerina i sila viskoznog trenja. Smerovi dejstvovanja ovih sila prikazani su na slici. Pošto je $\rho_d < \rho_{Al}$, drvena kuglica se kreće naviše (isplivava), a kako je $\rho_{Al} > \rho_g$, aluminijumska kuglica se kreće naniže (tone). Kako su

$\rho_d = 900 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

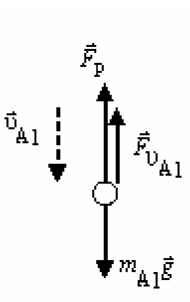
$\rho_{Al} = 2700 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

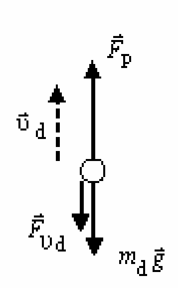
$\rho_g = 1270 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$\eta = 0{,}8$ Pa·s

$v_{Al} = ?$,

$v_d = ?$




zapremine kuglica iste, na kuglice dejstvuje sila potiska istog intenziteta;

$$F_p = \rho_g \cdot V \cdot g = \rho_g \cdot \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \cdot g = \frac{4}{3} r^3 \cdot \rho_g \cdot g \cdot \pi$$

$$F_p = \frac{4}{3} \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\right)^3 \cdot 1270 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}14 \text{ N} = 4{,}17 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Sile zemljine teže koje dejstvuju na kuglice su

$$m_d g = \rho_d V g = \rho_d \frac{4}{3} r^3 \pi g = 900 \cdot \frac{4}{3} (2 \cdot 10^{-3})^3 3{,}14 \cdot 9{,}81\text{N} = 2{,}96 \cdot 10^{-4} \text{N}.$$

$$m_{Al} \cdot g = \rho_{Al} \cdot V \cdot g = \rho_{Al} \frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \cdot g = 2700 \cdot \frac{4}{3} (2 \cdot 10^{-3})^3 3{,}14 \cdot 9{,}81\text{N} =$$

$$= 8{,}87 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Sile viskoznog trenja koje deluju na kuglice su $F_{vAl} = 6\,\pi\,\eta\,r\,v_{Al}$, i

$F_{vd} = 6\,\pi\,\eta\,r\,v_d$.

Na osnovu drugog Njutnovog zakona, za sile koje imaju isti pravac, možemo pisati

*za alminijumsku kuglicu:*

$F_p + F_{vAl} = m_{Al}\,g$,

Dakle, $F_p + 6\,\pi\,\eta\,r\,v_{Al} = m_{Al}\,g$ .

Odatle su tražene vrednosti

$$v_{Al} = \frac{m_{Al} g - F_p}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r},$$

$$v_{Al} = \frac{8{,}87 \cdot 10^{-4} - 4{,}17 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}002} \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 0{,}016 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*za drvenu kuglicu:*

$F_p = F_{vd} + m_d\,g$.

$F_p = 6\,\pi\,\eta\,r\,v_d + m_d\,g$,

$$v_d = \frac{F_p - m_d \cdot g}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r},$$

$$v_d = \frac{4{,}17 \cdot 10^{-4} - 2{,}96 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}002} \frac{\text{m}}{\text{s}} =$$

$$= 0{,}004 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

7.39. Od žice je načinjen ram, sa pokretnim delom dužine 22,5 cm. U ram postavimo opnu od sapunice. Ako na pomičnu žicu okačimo teg mase $m$ = 182 mg, taj teg niti povećava opnu od sapunice, niti je steže. Odrediti koeficijent površinskog napona sapunice.

✍

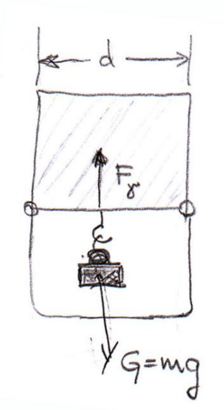
$d = 22{,}5 \text{ cm} = 22{,}5 \cdot 10^{-2} \text{m}$

$m = 182 \text{ mg} = 182 \cdot 10^{-3} \text{g}$

$= 182 \cdot 10^{-3}\ 10^{-3} \text{kg}$

$m = 182 \cdot 10^{-6} \text{kg}$

$\gamma = ?$




$G = F_\gamma \cdot 2$

$mg = 2\gamma d$

$$\gamma = \frac{mg}{2d} = \frac{182 \cdot 10^{-6} \text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 22{,}5 \cdot 10^{-2} \text{m}} =$$

$$\gamma = 3{,}97 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

7.40. U kapilarnoj cevčici, unutrašnjeg prečnika $2r$ = 1 mm, glicerin se penje do visine 2 cm. Koliki je koeficijent površinskog napona glicerina? Kvašenje kapilare je potpuno. Gustina glicerina je 1260 kg/m$^3$.

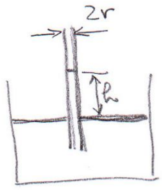
✍

$2r = 1\ \mathrm{mm}$

$h = 2\ \mathrm{cm}$

$\rho = 1260\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

$\gamma = ?$




$F = G$

$\gamma 2r\pi = \rho h r^2 \pi \cdot g$

$\gamma = \frac{1}{2}\rho g r h = \frac{1}{2}\, 1260\, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{2} 10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

$\gamma = 630 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 0{,}06\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$

7.41. Kroz sud sa glicerinom, pusti se da pada kuglica, poluprečnika $r$ = 2,5 mm, stalnom brzinom $v$ = 0,56 cm/s. Kuglica je načinjena od stakla, gustine $\rho$ = 2,53 g/cm$^3$, a gustina glicerina je $\rho_t$ = 1,27 g/cm$^3$. Odrediti koeficijent viskoznosti glicerina.

✍

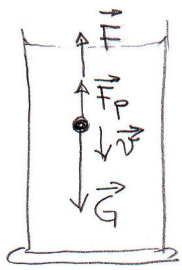
$r = 2{,}5\ \mathrm{mm}$

$v = 0{,}56\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$

$\rho = 2{,}53\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$\rho_t = 1{,}27\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

$\eta = ?$




$\eta = \frac{2}{9}\frac{(\rho - \rho_t) r^2 g}{v} = 3{,}06\ \mathrm{Pa\,s}$

## 8. Molekulsko kinetička teorija

8.1. U boci čija je zapremina 20 $l$, zatvoren je vodonik temperature 300 K i pritiska 9,8·10$^5$ Pa. Koliko se molekula vodonika nalazi u boci? Univerzalna gasna konstanta je 8,3 J/(molK);

Avogadrov broj 6,023·10$^{23}$ molekula/mol.

✍

$$N = nN_a = \frac{pV}{RT}N_a = 7{,}8\ \mathrm{mol}\ N_a = 4{,}7 \cdot 10^{24}\,\mathrm{molekula}$$

8.2. U cilindru sa pokretnim klipom zatvoren je gas temperature 293 K i zapremine 0,2 $l$. Površina jedne strane klipa je 5 cm$^2$. Za koliko će se klip pomeriti ako se gas zagreje do temperature 373 K? Pritisak gasa smatrati konstantnim?

✍

$$V_2 = \frac{V_1 T_2}{T_1} = 0{,}254\ \ell \qquad \Delta h = \frac{\Delta V}{S} = 10{,}8\ \mathrm{cm}$$

8.3. Čelična boca ispunjena je azotom mase 60 g pod pritiskom 0,9 MPa. Temperatura azota je 0°C. Da li će boca izdržati pritisak koji se uspostavi pri zagrevanju azota do temperature od 60°C, ako boca može da izdrži najveći pritisak od 1,5 MPa? Kolika je zapremina boce? Molarna masa azota je 0,028 kg/mol.

✍

$$p_1 = \frac{p_0 T_1}{T_0} = 1{,}09\mathrm{MPa} \langle 1{,}5\mathrm{MPa} \qquad V = \frac{mRT}{pM} = 5{,}39\ell$$

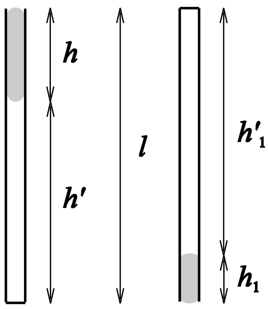
8.4. U boci zapremine 56,6 *l* nalazi se kiseonik pritiska 0,4 MPa i temperature 320 K. Kasnije se ustanovi da je usled propuštanja ventila boce pritisak kiseonika opao na 0,3 MPa, a temperatura na 300 K. Odrediti masu kiseonika koji je istekao iz boce i gustinu kiseonika koji se nalazi u početku u boci. Molarna masa kiseonika je 0,032 kg/mol.

✍

$$m_{ist} = m_0 - m_1 = \frac{VM}{R}\left(\frac{p_0}{T_0} - \frac{p_1}{T_1}\right) = 0{,}054\ \mathrm{kg}$$

$$\rho = \frac{m_0}{V} = \frac{pM}{RT} = 4{,}8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

8.5. *U uskoj staklenoj cevi koja je na jednom kraju zatopljena zatvoren je vazduh pomoću žive. Kada se cev nalazi u vertikalnom položaju sa otvorom naviše stub žive visine 0,1 m dolazi do otvora cevi. Ako se cev dovede u isti položaj ali sa otvorom naniže iz cevi iscuri jedan deo žive. Odredi visinu živinog stuba koji se zadrži u cevi dužine 0,5 m, ako je atmosferski pritisak jednak pritisku stuba žive visine 0,75 m i ako je temperatura konstantna.




✍

$$\mathrm{I}\quad \rho gH + \rho gh = p_v,\quad V = (l-h)S$$

$$\mathrm{II}\quad \rho gH = \rho gh_1 + p_v',\quad V' = (l-h_1)S$$

$$p_{at} = \rho gH$$

$$p_v V = p_v' V'$$

$$h_1^2 - (H+l)h_1 + \left(hH - hl + h^2\right) = 0$$

$$(h_1)_{12} = \frac{H + l \pm \sqrt{(H+l)^2 - 4\left(hH - hl + h^2\right)}}{2}$$

$$(h_1)_1 = 0{,}025\ \mathrm{m}$$

$$(h_1)_2 = 1{,}225\ \mathrm{m}\ \rangle \mathrm{h}$$

8.6. Na temperaturi od 20°C ukupan pritisak gasne smeše je 103,5 kPa. Parcijalni pritisci za tri komponente ove gasne smeše su: za vodonik 26,66 kPa, za metan 42,66 kPa i za etilen 14,00 kPa. Izračunati koliki je procenat azota kao četvrte komponente ove smeše.

✍

$$p = \sum_{i=1}^{4} p_i \quad p_4 = p - \sum_{i=1}^{3} p_i = 20{,}18\ \mathrm{kPa}$$

$$\left.\begin{matrix} p_1V = n_1RT \\ p_2V = n_2RT \\ p_3V = n_3RT \\ p_4V = n_4RT \end{matrix}\right\} V\sum p_i = RT\sum n_i, \quad \frac{p_4V}{V\sum p_i} = \frac{n_4RT}{RT\sum n_i}$$

$$\frac{n_4}{\sum n_i} = \frac{p_4}{\sum p_i} = 0{,}195 \qquad \frac{n_4}{\sum n_i}100\,\% = 19{,}5\,\%$$

8.7. Dva balona su međusobno spojena preko jedne slavine. U prvom balonu se nalazi gas pod pritiskom $10^5$Pa. U drugom je isti gas pod pritiskom $0{,}5\cdot10^5$ Pa. Zapremina prvog balona iznosi 2*l* a drugog 8*l*. Koliki će se pritisak uspostaviti u balonima pri otvaranju slavine? Smatrati da se temperatura gasa ne menja.

✍

prvi način
$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} p_1V_1 = \dfrac{m_1}{M}RT = n_1RT \\ p_2V_2 = \dfrac{m_2}{M}RT = n_2RT \end{matrix}\right\} \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1V_1}{p_2V_2} = 0{,}5; m_2 = 2m_1 \\ p(V_1+V_2) = \dfrac{m_1+m_2}{M}RT \\ \dfrac{p\ (V_1+V_2)}{p_1V} = \dfrac{(m_1+m_2)RT}{m_1RT} = \dfrac{m_1+m_2}{m_1} = 3 \\ p = \dfrac{3p_1V_1}{V_1+V_2} = 60\text{kPa} \end{cases}$$

drugi način
$$p_1V_1 = n_1RT$$
$$p_2V_2 = n_2RT$$
$$p(V_1+V_2) = (n_1+n_2)RT$$
$$p(V_1+V_2) = \left(\frac{p_1V_1}{RT} + \frac{p_2V_2}{RT}\right)RT$$

treći način
$$\begin{cases} p = p' + p'' \\ p_1V_1 = p'(V_1+V_2) \\ p_2V_2 = p''(V_1+V_2) \\ p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1+V_2} \end{cases}$$

8.8. Odrediti gustinu smese koja se sastoji iz 4 g vodonika i 32 g kiseonika na temperaturi od 27°C i pritisku 760 mmHg.

$$M_{kiseonika} = 32\frac{\text{g}}{\text{mol}},\ M_{vodonika} = 2\frac{\text{g}}{\text{mol}}.$$

✍

$$\left.\begin{aligned} p_1V &= \frac{m_1}{M_1}RT \\ p_2V &= \frac{m_2}{M_2}RT \end{aligned}\right\} p = p_1 + p_2 = \left(\frac{m_1}{M_1}RT + \frac{m_2}{M_2}RT\right)\frac{1}{V}$$

$$pV = \underbrace{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}_{n} RT \qquad V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}$$

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}} = 0{,}5\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

8.9. Kompresor zahvata pri svakom hodu klipa 4 *l* vazduha na atmosferskom pritisku i temperaturi -3 °C i sabija ga u rezervoar zapremine 1,5 m$^3$. Temperatura vazduha u rezervoaru održava se na oko 45 °C. Koliko hodova treba da napravi klip kompresora da bi se pritisak u rezervoaru povećao na 2 kp/cm$^2$ ?

✍

$$n_r = \frac{p_r V_r}{RT_r}, \quad n_K = \frac{p_K V_K}{RT_K}$$

$$N = \frac{n_r}{n_K} = 637$$

8.10. Tri balona su međusobno spojena preko slavina. U prvom balonu ($V_1$=8 *l*) se nalazi vodonik pod pritiskom 2·10$^5$ Pa, u drugom ($V_2$ = 16 *l*) je azot pod pritiskom 0,5·10$^5$ Pa, a u trećem ($V_3$ = 24 *l*) kiseonik pod pritiskom od 10$^5$ Pa. Ne menjajući temperaturu gasa od 20°C otvore se slavine između balona. Koliki se pritisak uspostavi u balonima? Koliko molekula svih gasova se nalazi u balonima?

✍

$V_1 = 8\ell \quad p_1 = 2\cdot 10^5\,\text{Pa}$

$V_2 = 16\ell \quad p_2 = 0{,}5\cdot 10^5\,\text{Pa}$

$V_3 = 24\ell \quad p_3 = 10^5\,\text{Pa}$

$t = 20°\text{C}$

$$\begin{aligned} p_1V_1 &= p_1'(V_1 + V_2 + V_3) \\ p_2V_2 &= p_2'(V_1 + V_2 + V_3) \\ p_3V_3 &= p_3'(V_1 + V_2 + V_3) \\ \hline p &= p_1' + p_2' + p_3' \end{aligned}$$

$$p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2 + p_3V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = 10^5\,\text{Pa}$$

$pV = nRT \qquad V = V_1 + V_2 + V_3$

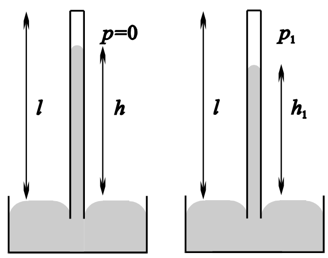
$n = \dfrac{pV}{RT} = 1{,}97\ \text{mol}$

$N = n\cdot N_a = 1{,}97\text{mol}\cdot 6{,}024\cdot 10^{23}\,\dfrac{\text{molekula}}{\text{mol}}$

$N = 12\cdot 10^{23}\ \text{molekula}$

8.11. Od cevi duge 90 cm poprečnog preseka 1,5 cm$^2$ napravljen je barometar. U ovoj cevi stoji živa na visini 75 cm. Sobna temperatura je 27°C. U evakuisani prostor iznad žive uvede se mala količina azota i stub padne na 70 cm. Koliko je mikrograma azota ubačeno?

✍




$\text{I}\ p_{at} = \rho gh; p = 0$

$\text{II}\ p_{at} = p_1 + p_{h_1};$

$l = 90\text{ cm}$ $\rho = 13{,}6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$S = 1{,}5\text{ cm}^2$ $M = 28\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$

$h = 75\text{ cm}$

$t = 27\ ^\circ\text{C}$

$h_1 = 70\text{ cm}$

$m = ?$

$$p_{h_1} = \rho g h_1;\ p_1 = p_{at} - p_{h_1}$$

$$p_1 V = nRT \quad p_1 V = \frac{m}{M} RT$$

$$V = (l - h_1) S$$

$$m = \frac{\rho g (h - h_1)(l - h_1) SM}{RT}$$

$$m = 2246\mu\text{g}$$

# 9. Termodinamika

9.1. Komad gvožđa, mase 0,3 kg i temperature 573 K, bacimo zajedno sa komadom cinka, mase 0,5 kg i temperature 423 K, u 1 litar vode temperature 10°C. Kolika će biti nova temperatura vode? ($c_{Fe}$ = 0,11 cal g$^{-1}$°C$^{-1}$, $c_{Zn}$ = 0,09 cal g$^{-1}$°C$^{-1}$).

✍

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m_{H_2O} = \rho V =$$

$$= 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 10^{-3} m^3 = 1\text{kg}$$

$$m_{Fe} = 0{,}3\text{kg}$$

$$m_{Zn} = 0{,}5\text{kg}$$

$$t_1 = 300°\text{C}$$

$$t_2 = 150°\text{C}$$

$$t_3 = 10°\text{C}$$

$$Q_{Fe} + Q_{Zn} = Q_{H_2O}$$

$$Q_{Fe} = c_{Fe} m_{Fe} (t_1 - t_s)$$

$$Q_{Zn} = c_{Zn} m_{Zn} (t_2 - t_s)$$

$$Q_{H_2O} = c_{H_2O} m_{H_2O} (t_s - t_3)$$

$$t_s = \frac{c_{Fe} m_{Fe} t_1 + c_{Zn} m_{Zn} t_2 + c_{H_2O} m_{H_2O} t_3}{c_{Fe} m_{Fe} + c_{Zn} m_{Zn} + c_{H_2O} m_{H_2O}}$$

$$t_s = 24{,}7°\text{C}$$

9.2. Ugljendioksid temperature 308 K i pritiska 1,96·10$^5$ Pa zatvoren je u cilindru pokretnim klipom koji može da klizi bez trenja. Zapremina ugljendioksida iznosi 0,5 m$^3$. Ako se ugljendioksid pri konstantnom pritisku, zagreje do temperature 508 K, izračunati: zapreminu gasa na temperaturi 508 K; količinu toplote koja se dovede ugljendioksidu pri zagrevanju; rad ekspanzije (dobijeni rad) u toku zagrevanja; promenu unutrašnje energije ugljendioksida u toku zagrevanja. $c_p$ = 934 J/(kgK); $R_g$ = 189 J/(kgK).

✍

$$p_1 = p_2; \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 = 0{,}825\text{m}^3$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{p_1 V_1}{RT_1} M = 1{,}68\text{kg}$$

$$\Delta Q = c_p m \Delta t = 934{,}4 \cdot 1{,}68 \cdot 200\text{J} = 314\text{ kJ}$$

$$A = p(V_2 - V_1) = 1{,}96 \cdot 10^5 (0{,}825 - 0{,}5)\text{J} = 64\text{ kJ}$$

$$\Delta U = c_v m \Delta t = \Delta Q - A = 250\text{ kJ}$$

9.3. Vazduh temperature 400°C zatvoren je u cilindru pokretnim klipom. Pri konstantnom pritisku $p$ = 0,5 MPa vazduh se sabija i rashlađuje do temperature 0°C. Ako zapremina gasa na temperaturi $t_1$ iznosi $V_1$ = 0,2 m$^3$ odrediti:

a) količinu toplote koja se oduzme vazduhu u toku sabijanja;
b) promenu unutrašnje energije vazduha;
c) rad sabijanja (uloženi rad).

Srednja specifična toplota vazduha $c_p$ = 993,03 J/(kgK), gasna konstanta $R_g$ = 287 J/(kgK), a konstanta $\gamma$ = 1,4.

✍
$$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1 \Rightarrow m = \frac{p_1V_1}{TR_g} = 0{,}52\text{kg}$$

$$\Delta Q = c_p m\Delta t = 993{,}03\cdot 0{,}52\cdot(0-400)\text{J} = -206{,}6\text{ kJ}$$

$$\Delta U = c_v m\Delta t = \frac{\Delta Q}{\gamma} = \text{-147,6 kJ}$$

$$p_1 = p_2; \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1 = 0{,}08\text{m}^3$$

$$A = p(V_2 - V_1) = \Delta Q - \Delta U = \text{-59 kJ}$$

9.4. U cilindru je, pokretnim klipom, zatvoren vazduh mase $m$ = 3,5 kg i temperature $t_0$ = 0°C. Nad vazduhom se izvrši adijabatska kompresija. Ako je rad kompresije $\Delta A$ = 100 J, odrediti:

a) unutrašnju energiju vazduha na kraju kompresije, pod pretpostavkom da njegova unutrašnja energija na $t_0$ = 0°C iznosi $U_0$ = 0 J;

b) temperaturu vazduha na kraju kompresije.

Specifična toplota vazduha $c_V$ = 720,68 J/(kgK).

✍

a) $\Delta U = A = 100\text{ J}, \quad U = U_0 + \Delta U = 100\text{ J}$

b) $\Delta U = c_v m(t - t_0) = c_v mt$

$$t = \frac{\Delta U}{c_v m} = 0{,}0396\ ^\circ\text{C}$$

9.5. Gas zapremine $V_1$ = 2 m$^3$ i pritiska $p_1$ = 0,29 MPa sabija se toliko da mu se pritisak povisi tri puta. U toku kompresije gas se stalno hladi vodom. Koliko kilograma vode je potrebno za hlađenje gasa da bi njegova temperatura u toku kompresije bila stalna? Temperatura vode pre hlađenja je $t_1$ = 15°C, a posle hlađenja $t_2$ = 32°C. Specifična tolplota vode iznosi $c$ = 4,186 kJ/(kgK).

✍
$$\Delta Q = A = \int_1^2 pdV = nRT\int_1^2 \frac{dV}{V} = nRT\ln V\Big|_1^2 = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) =$$

$$= nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2} = nRT\ln\frac{p_1}{3p_1} = p_1V_1\ln 3^{-1} = -p_1V_1\ln 3 =$$

$$= -p_1V_1\cdot 1{,}09 = A = -632\text{ kJ}$$

$$\Delta Q_{oduzetogasu} = \Delta Q_{primilavoda} = cm(t_2 - t_1), m = \frac{\Delta Q}{c(t_2 - t_1)} = 9\text{ kg}$$

9.6. Dva mola helijuma nalaze se na temperaturi od 27 °C i zauzimaju zapreminu od 20 *l*. Helijum se najpre širi pri konstantnom pritisku sve dok mu se ne udvostruči zapremina, a zatim se širi adijabatski dok mu se temperatura ne vrati na početnu vrednost. Kolika je ukupna dovedena količina toplote u toku procesa? Koliki je ukupni rad izvršio helijum? Kolika je ukupna promena unutrašnje energije? Objasni dobijeni rezultat. Nacrtaj $pV$ dijagram. $M$ = 4gmol$^{-1}$, $c_p$ = 5,23 J/g°C, $\kappa$ = 1,67.

✍ $n = 2\text{mol}$ $V_2 = 2V_1$ $m = Mn = 8$ g

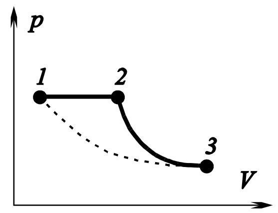
$T_1 = 300$ K $Q = const$ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$; $T_2 = 2T_1 = 600$ K

$V_1 = 20\ \ell$ $T_3 = T_1$

$p = const$ $\Delta Q, \Delta U, A = ?$

$\Delta Q_1 = c_p m\Delta t$; $\Delta Q_2 = 0$; $\Delta Q = \Delta Q_1 = 12{,}4$ kJ

$\Delta U = c_V m\Delta t_{1,2,3} = 0$ jer $\Delta t_{1,2,3} = 0$




$$p = \frac{nRT_1}{V_1} = 0{,}249 \text{ MPa}$$

$$A_1 = p(2V_1 - V_1) = 4{,}98 \text{ kJ}$$

$$A_2 = \Delta U_2 = \frac{c_p}{\kappa} m\Delta\, t = 7448 \text{ J}$$

$$A = A_1 + A_2 = 12{,}4 \text{ kJ}$$

$$\Delta Q = A$$

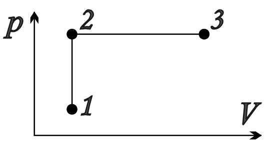
9.7. Kiseonik mase $m$ = 3 kg i temperature $T_1$ = 283 K zagreva se od stanja 1 do stanja 2 izohorski, a zatim od stanja 2 do stanja 3 izobarski. U toku izobarskog procesa zapremina kiseonika se poveća dva puta, a njegova unutrašnja energija poveća se za $U_{2,3}$ = 730,32 kJ. Odrediti:

a) ukupnu količinu toplote koja se dovede kiseoniku;

b) dobijeni rad.

Specifična toplota kiseonika iznosi $c_p$ = 913,42 J/(kgK), a konstanta $\gamma$ = 1,4.

✍




$$2V_2 = V_3; \quad \frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}; \quad T_3 = 2T_2$$

$$\Delta U_{23} = c_V m(T_3 - T_2) = c_V m(2T_2 - T_2) = c_V m T_2 \Rightarrow \quad T_2 = \gamma \frac{\Delta U_{23}}{c_p m}$$

$$\Delta Q_{12} = \Delta U_{12} = c_V m(T_2 - T_1) = \frac{c_p}{\gamma} m\left(\frac{\gamma \Delta U_{23}}{c_p m} - T_1\right) = 176 \text{kJ}$$

$$\Delta Q_{23} = \Delta U_{23} + A = c_p m(T_3 - T_2) = c_p m(2T_2 - T_2) = c_p m T_2 =$$

$$= c_p m \frac{\gamma \Delta U_{23}}{c_p m}$$

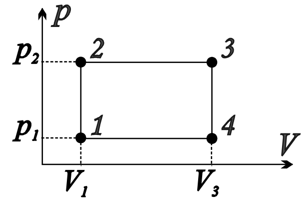
$$\Delta Q_{23} = \gamma \Delta U_{23} = 1022 \text{kJ}$$

$$\Delta Q = \Delta Q_{12} + \Delta Q_{23} = 1{,}2 \text{ MJ}$$

$$A_{13} = A_{12} + A_{23} = A_{23} = \Delta Q_{23} - \Delta U_{23} = 292 \text{kJ}$$

9.8. Mol nekog idealnog dvoatomnog gasa učestvuje u jednom kružnom termodinamičkom ciklusu. U početku, gas ima zapreminu $V_1$ = 12,05 *l* pod pritiskom $p_1$ = 0,2 MPa. Gas se prvo izohorski zagreva sve dok njegov pritisak ne dostigne $p_2$ = 0,3 MPa. Zatim se gas izobarski širi do zapremine $V_3$ = 24,1 *l*. Posle toga gas se izohorski hladi do početnog pritiska $p_1$, i najzad, izobarski sabije do početne zapremine $V_1$. Koje su temperature karakterističnih tačaka kružnog ciklusa i koliki je ukupan koristan rad? Za dvoatomne gasove odnos $\gamma = c_p/c_v$ = 1,40.

✍




$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{R} = 290\text{K}, \quad T_2 = \frac{T_1 p_2}{p_1} = 435\text{K}$$

$$T_3 = \frac{T_2 V_2}{V_1} = 870\text{K}, \quad T_4 = \frac{T_3 p_1}{p_2} = 580\text{K}$$

$$A = A_1 - A_2 = p_2(V_3 - V_2) - p_1(V_3 - V_2) = (V_3 - V_2)\cdot(p_2 - p_1)$$

9.9. Jedan mol dvoatomnog idealnog gasa promeni svoju zapreminu, pri stalnom pritisku $p = 10^5$ Pa, sa $V_1$ = 5 *l* na $V_2$ = 7 *l*. Za koliko se promeni unutrašnja energija toga gasa? $\gamma$ = 1,4.

✍

$$\Delta Q = \Delta U + A$$

$$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + p\Delta V; \quad m = M;$$

$$pV_1 = nRT_1; \quad pV_2 = nRT_2 \quad \Rightarrow \quad p\Delta V = R\Delta T$$

$$c_p M\Delta T = c_V M\Delta T + R\Delta T$$

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} \quad \Rightarrow \quad c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)M}$$

$$\Delta U = c_V m\Delta T = \frac{R}{(\gamma - 1)M} M\Delta T = \frac{p\Delta V}{(\gamma - 1)} = 500\text{J}$$

9.10. Izvršeni rad pri sabijanju vazduha, na temperaturi 15 °C, iznosi 100 kJ. Vazduh se hladi sa 2 *l* vode, kojoj se povisi tamperatura za 10 K. Izračunati masu vazduha, ako se vazduh pri sabijanju zagreje do temperature koja je za 20 % viša od prvobitne. Specifična toplota vazduha je 721 J/kgK, a vode 1 kcal/kg°C.

✍

$$m = \frac{A - c_V m_V \Delta t_V}{c\Delta t} = \frac{10^5\text{J} - 4{,}19\cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} 10\,\text{K}\; 2\,\text{kg}}{721 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} 3\text{K}} = 7{,}5\text{ kg}$$

9.11. Kad se u 4 kg vode uvede 63g vodene pare od 100°C, voda se zagreje na 20°C. Kolika je bila početna temperatura vode? Toplota kondenzovanja vode je $q_i$ =540 cal/g.

✍

$$Q_1 = q_i m_p$$

$$Q_2 = c_V m_p (t_p - t)$$

$$Q_3 = c_V m_V (t - t_V)$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

$$q_i m_p + c_V m_p (t_p - t) = c_V m_V (t - t_V)$$

$$t_V = 7°\text{C}$$

9.12. Voda, mase $m_1$ = 200 g i temperature $t_1$ = 80 ˚C, pomeša se sa vodom, mase $m_2$ = 400 g i temperature $t_2$ = 10˚C. Kolika je temperatura mešavine?

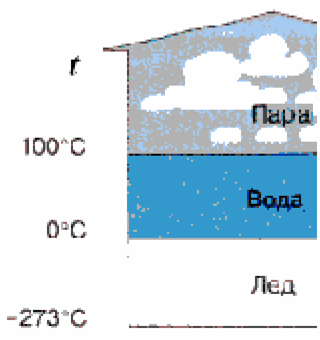
✍

Kada se dve količine vode različitih temperatura pomešaju, voda na višoj temperaturi predavaće toplotu vodi na nižoj temperaturi, sve dok se njihove temperature ne izjednače. Na osnovu zakona održanja energije je $\Delta Q_h = \Delta Q_z$, gde je $\Delta Q_h$ – toplota koju otpusti voda na višoj temperaturi mase $m_1$, a $\Delta Q_z$ – toplota koju primi voda niže temperature mase $m_2$. Kako je $\Delta Q_h = m_1 c(t_1 - t)$, a $\Delta Q_z = m_2 c(t - t_2)$, gde je $t$ temperatura toplotne ravnoteže, to je $m_1 c(t_1 - t) = m_2 c(t - t_2)$, odakle je $t = \dfrac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{0{,}2 \cdot 80 + 0{,}4 \cdot 10}{0{,}2 + 0{,}4}\,°\mathrm{C} = 33{,}33°\mathrm{C}$.

9.13. Koliku količinu toplote treba utrošiti da led mase $m = 10$ kg i temperature $t = -10$°C, prevedemo u vodenu paru, temperature $t_2 = 110$°C? Specifične toplote leda, vode i pare su:

$c_L = 2120\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg°C}}$, $c_V = 4186\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, $c_p = 2010\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, dok su latentne toplote topljenja leda i isparavanja vode:

$q_t = 3{,}37 \cdot 10^5\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$, $q_i = 2{,}26\ \dfrac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$.




✍ Da bi se led preveo u paru temperature $t_2$ potrebna je količina toplote koja iznosi

$\Delta Q = \Delta Q_{z1} + \Delta Q_t + \Delta Q_{z2} + \Delta Q_i + \Delta Q_{z3}$ gde su:

$\Delta Q_{z1}$ –toplota potrebna za zagrevanje leda do tačke topljenja $t_0 = 0$°C;

$\Delta Q_t$ – toplota topljenja leda;

$\Delta Q_{z2}$ – toplota potrebna za zagrevanje vode, nastale od leda, do temperature $t = 100$°C;

$\Delta Q_i$ – toplota isparavanja vode na 100°C;

$\Delta Q_{z3}$ – toplota potrebna za zagrevanje pare do temperature $t_2$.

Kako su
$\Delta Q_{z1} = m \cdot c_L (t_0 - t)$; $\Delta Q_t = m \cdot q_t$; $\Delta Q_{z2} = m c_v (t_1 - t_0)$; $\Delta Q_i = m \cdot q_i$; $\Delta Q_{z3} = m \cdot c_p (t_2 - t_1)$, to je

$\Delta Q = m[c_L (t_0 - t) + q_t + cv\,(t_1 - t_0) + q_i + c_p(t_2 - t_1)]$, odnosno

$\Delta Q = 10 \cdot [2120 \cdot (0 + 10) + 3{,}371 \cdot 0^5 + 4186 \cdot (100 - 0) + 2{,}26 \cdot 10^6 + 2010 \cdot (110 - 100)]$ J

$\Delta Q = 30{,}57$ MJ

9.14. Koliko toplote pređe na okolinu kada se 10 g vodene pare, temperature 100℃, prevede u led, temperature -5℃? Latentna toplota kondezovanja vodene pare na 100℃ je $q_i = 22{,}6 \cdot 10^5\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$, specifična toplota vode je $c_V = 4{,}19 \cdot 10^3\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, a leda $c_L = 2{,}1 \cdot 10^3\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$, dok je latentna toplota mržnjenja vode na 0℃, $q_t = 3{,}3 \cdot 10^5\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$.

($\Delta Q = 3{,}02 \cdot 10^4$ J)

## 10. Električna struja

10.1. Kroz bakarni provodnik prečnika $d = 1$ mm protiče struja jačine $I = 4$ A. Broj slobodnih elektrona u 1 cm$^3$ iznosi $8{,}5 \cdot 10^{22}$, a naelektrisanje elektrona je $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C. Izračunati:

a) srednju brzinu elektrona u provodniku ;

b) gustinu električne struje u provodniku.

✍

$$I = neS\bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{I}{neS} = \frac{4\text{A}\cdot 4}{8{,}5\cdot 10^{22}\,\frac{\text{molek}}{10^{-6}\,\text{m}^3}1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{C}\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2\cdot 3{,}14} = 37\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$j = \frac{I}{S} = 5{,}1\cdot 10^{+6}\,\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \quad \text{ili} \quad j = nev$$

10.2. Odrediti srednju brzinu usmerenog kretanja slobodnih elektrona u metalnom provodniku površine poprečnog preseka $S$ = 0,5 cm$^2$ kroz koji teče struja jačine $I$ =12 A, ako u svakom kubnom centimetru provodnika ima 5·10$^{21}$ slobodnih elektrona.

✍ $I = neS\bar{v}$

srednja brzina elektrona je

$$\bar{v} = \frac{I}{neS} = \frac{12}{5\cdot 10^{15}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\bar{v} = 3\cdot 10^{8}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

10.3. Kroz provodnik protiče struja jačine 8 μA. Za koje vreme će kroz poprečni presek tog provodnika proteći količina naelektrisanja koja iznosi 3 mC?

✍

$I$ = 8 μA = 8·10$^{-6}$ A

$\Delta q$ = 3 mC = 3·10$^{-3}$C

$\Delta t$ = ?

Kako je po definiciji jačina struje $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$,

to je $\Delta t = \dfrac{\Delta q}{I} = \dfrac{3\cdot 10^{-3}}{8\cdot 10^{-6}}\,\text{s} = 375\text{s}.$

10.4. Kroz provodnik protiče struja stalne jačine $I$ = 10 A. Koliko elektrona prođe kroz provodnik za 1 h?

✍ ($n$ = 22 ·10$^{22}$)

10.5. Koliko navojaka gvozdene žice, prečnika $d$ = 1 mm treba namotati na cilindar prečnika 2$r$ = 2,5 cm, da bi se dobio kalem otpornosti $R$ = 60 Ω? Specifična otpornost gvožđa je $\rho$ = 0,12·10$^{-6}$ Ωm.

✍

$$l = n2r\pi \qquad l = \frac{RS}{\rho} \qquad S = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$n2r\pi = \frac{RS}{\rho} \qquad n = \frac{RS}{2r\pi\rho} = \frac{R}{2r\pi\rho}\,\frac{d^2\pi}{4} = 5000 \text{ navojaka}$$

10.6. Namotavanjem žice prečnika $d$ = 0,6 mm, specifične otpornosti $\rho$ = 1,2·10$^{-6}$ Ωm na porcelanski valjak prečnika $d_1$ = 3 cm, dobija se otpornost $R$ = 100 Ω. Izračunati broj navojaka žice $n$.

✍

$d = 0{,}6$ mm $= 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ m
$\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ Ωm
$d_1 = 3$ cm $= 3 \cdot 10^{-2}$ m
$R = 100$ Ω
$n = ?$

Broj navojaka žice $n$ računamo odnosom cele dužine žice $l$ i dužine jednog namotaja $l_1$, $n = \dfrac{l}{l_1}$. Kako je dužina žice $l$ određena njenom otpornošću $R$, to je $l = \dfrac{RS}{\rho} = \dfrac{R \cdot \dfrac{d^2\pi}{4}}{\rho}$, dok je dužina jednog navojaka $l_1 = 2 r_1 \pi = d_1 \pi$.

Dakle, $n = \dfrac{\dfrac{Rd^2\pi}{4\rho}}{d_1\pi} = \dfrac{Rd^2}{4\rho d_1}$, odnosno $n = \dfrac{100 \cdot \left(0{,}6 \cdot 10^{-3}\right)^2}{4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 250$ navojaka.

10.7. Bakarna žica, dužine 110 m i poprečnog preseka 1 mm$^2$, uključena je na napon od 12 V. Kolika je jačina struje kroz žicu? Specifična otpornost bakra je$1{,}78 \cdot 10^{-8}$ Ωm.

✍

$l = 110$ m
$S = 1$ mm$^2$
$U = 12$ V
$\rho = 1{,}78 \cdot 10^{-8}$ Ωm
$I = ?$

Jačina struje za deo strujnog kola koji se nalazi pod naponom $U$, električne otpornosti $R$, računa se po Omovom zakonu $I = \dfrac{U}{R}$. Otpornost provodnika , određena je izrazom $R = \rho \dfrac{l}{S}$, tako da je tražena jačina struje $I = \dfrac{U}{\rho \dfrac{l}{S}} = \dfrac{US}{\rho l}$, $I = \dfrac{12 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1{,}78 \cdot 10^{-8} \cdot 110}\text{ A} = 6{,}1\text{A}$.

10.8. Na izvor, elektromotorne sile $E = 10$ V i unutrašnje otpornosti $r = 1$ Ω, vezan je otpornik, otpornosti $R = 9$ Ω. Odrediti jačinu struje koju daje električni izvor i napon na krajevima električnog izvora.

✍

$E = 10$ V
$r = 1$ Ω
$R = 9$ Ω
$I = ?$
$U = ?$

Struja u kolu određena je Omovim zakonom $I = \dfrac{E}{R+r} = \dfrac{10}{9+1}\text{ A} = 1\text{A}$.

Napon na izvoru manji je od vrednosti elektromotorne sile $\varepsilon$ za vrednost $I \cdot r$ , koliko iznosi pad napona u izvoru zbog unutrašnje otpornosti, $U = E - I \cdot r = (10 - 1 \cdot 1)\text{V} = 9\text{V}$. Ovaj napon je jednak naponu na potrošaču $R$, koji na osnovu Omovog zakona iznosi $U = I \cdot R = 1 \cdot 9\text{V} = 9\text{V}$.

10.9. Voda, mase $m = 10$ kg, zagreva se od $t_1 = 20$°C do $t_2 = 100$°C, pomoću struje koja protiče kroz provodnik otpornosti $R = 90$ Ω priključen na napon od $U = 220$ V. Odrediti: a) vreme zagrevanja vode; b) utrošenu električnu energiju. Specifična toplota vode je $c = 4{,}19 \cdot 10^3 \dfrac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

✍

Proticanjem struje kroz otpornik, rad električne struje se

$m = 10$ kg

$c = 4{,}19\cdot 10^3\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$

$t_1 = 20^\circ$C

$t_2 = 100^\circ$C

$R = 90\ \Omega$

$U = 220$ V

$\tau = ?$

$E = ?$

pretvara u toplotu (Džulov zakon), pa je $A = Q$. Kako je $A = \dfrac{U^2}{R}\cdot\tau$, a $Q = m\cdot c\cdot\Delta t$, to je $\dfrac{U^2}{R}\tau = mc\Delta t$. Traženo vreme je $\tau = 6233$ s $\approx 104$ min,

a utrošena električna energija

$$E = A = \frac{U^2}{R}\tau = \frac{220^2}{90}\cdot 6233\ \mathrm{J} = 3{,}3\ \mathrm{MJ}.$$

10.10. Do koje će se temperature zagrejati sijalica ako pri naponu od 220 V kroz nju proteče struja jačine 0,61 A. Otpor sijalice na 20°C iznosi 39,2 Ω, a temperaturni koeficijent vlakna sijalice je $4{,}3\cdot 10^{-3}\mathrm{K}^{-1}$.

✍

$$R_1 = R_0(1+\alpha t_1) \qquad R_2 = R_0(1+\alpha t_2) \qquad I = \frac{U}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{220V}{0{,}61A} = 360{,}65\Omega$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{(1+\alpha t_1)}{(1+\alpha t_2)} \qquad t_2 = \frac{R_2 + R_2\alpha t_1 - R_1}{R_1\alpha} = 2091^\circ\mathrm{C}$$

10.11. Izračunati elektromotornu silu i unutrašnju otpornost izvora ako je merenjem dobijeno sledeće: izvor povezan u kolo sa jednim promenljivim otporom i ampermetrom pri otpornosti od 1,55 Ω daje struju od 1 A, a pri otpornosti od 3,35 Ω daje struju od 0,5 A.

✍ $\varepsilon = 1{,}8$ V, $r = 0{,}25\ \Omega$

10.12. Na cilindar prečnika 5 cm namotano je 400 namotaja bakarne žice prečnika 0,2 mm. Koliku jačinu struje pokazuje miliampermetar unutrašnje otpornosti 0,5 Ω, ako je kalem priključen na izvor EMS od 70 V i unutrašnje otpornosti 0,5 Ω. Specifična otpornost bakra je $0{,}017\cdot 10^{-6}\ \Omega$m.

✍ $$R = \frac{\rho l}{S} = 34\Omega; \qquad I = \frac{\varepsilon}{R + r_a + r} = 2\mathrm{A}$$

10.13. Za podizanje lifta koristi se električni motor koji je priključen na napon od 220 V. Težina lifta sa teretom iznosi 5000 N, a motor je u stanju da za vreme od 30 s lift podigne na visinu od 19 m. Kolika jačina struje protiče kroz namotaje motora kada se za podizanje opterećenog lifta koristi 30 % utrošene električne energije.

✍ $P = UI \; A = UIt \; P_{isk} = \frac{30}{100}P = \frac{30}{100}UI$

$$P = \frac{A}{t} \; A = Gh \; P = \frac{Gh}{t}$$

$$\frac{Gh}{t} = \frac{30}{100}UI \; I = \frac{Gh}{0{,}3Ut} = 48 \text{ A}$$

10.14.Odredi otpornost provodnika koji treba da, za vreme $t$ = 12 min, zagreje vodu mase 2 kg od 16 °C do 90 °C. Grejač se priključuje na jednosmerni napon $U$ = 110 V. 75% razvijene toplote se troši na zagrevanje vode. $c_v$= 4,2 J(gK)$^{-1}$.

✍ $E = I^2 R\tau = \frac{U^2\tau}{R} \; Q = cm\Delta t \; \eta = 0{,}75 = \frac{Q}{E}$ ; $0{,}75\frac{U^2\tau}{R} = cm\Delta t;$

$$R = \frac{3}{4}\frac{U^2\tau}{cm\Delta t} = \frac{3}{4}\frac{(110)^2 12\cdot 60}{2\cdot 4{,}2\cdot 10^3(90-16)}\Omega = 10{,}5\Omega$$

10.15. Za strujomer su priključeni sledeći potrošači: sijalica od 500 W (snaga merena u datom kolu), jedan električni bojler i jedan elektromotor snage $P_m$ = 2,2 kW. a) Koliko kilovatčasova utrošene električne energije će pokazivati strujomer ako je u toku dana sijalica bila uključena 5 h, ako je bojlerom za 30 min zagrejano 80 kg vode od 20°C do 40°C i ako je elektromotor radio 3 h? b) Kolika je jačina električne struje koja prolazi kroz strujomer kada su svi aparati uključeni na napon od 220 V? Otpor strujomera i gubitke u vodovima zanemariti. $c_v$ = 4,2 J(gK)$^{-1}$

✍

$P_s = 500\text{W}, \tau_s = 5\text{h}, P_m = 2{,}2\text{kW}, \tau_m = 3\text{h}, \tau_b = 30\,\text{min},$

u bojleru $m = 80\text{kg},$

$t_1 = 20°\text{C}, t_2 = 40°\text{C}$

$$\Delta Q_b = cm\Delta t = 6697\,\text{kJ}, \quad P_b = \frac{6697\,\text{kJ}}{30\cdot 60\text{s}} = 3{,}72\text{kW}$$

$P_s = 500\text{W}$

$E_s = P_s\tau = 2{,}5\text{kWh}$

$E_m = P_m\tau_m = 6{,}6\text{kWh}$

$E_b = P_b\tau_b = 1{,}86\text{kWh}$

$E = UIt = E_m + E_b + E_s = 11\text{kWh}$

$$I_i = \frac{P_i}{U} \quad I_s = 2{,}27\text{A}, \quad I_m = 10\text{A}, \quad I_b = 16{,}9\text{A}$$

$$I = I_s + I_m + I_b = 29{,}18\text{A}$$

$$P = UI = (I_s + I_b + I_m)U = 6{,}4 \text{ kW}$$

10.16. U toku 5min pokazivanje strujomera se povećalo za 0,03 kilovatčasova. Pri tome je zagrevano 1000 g vode žicom debljine 1mm specifičnog otpora 0,42Ωmm$^2$m$^{-1}$. Za koliko se stepeni zagrejala voda i kolika je bila dužina žice ako je uključeni ampermetar pokazivao 3,2A?

✍ $A = I^2 R\tau = cm\Delta t$; $\Delta t = \frac{A}{cm} = 26°\text{C}$; $R = \rho\frac{l}{S} = \frac{A}{I^2\tau} \Rightarrow l = 66 \text{ m}$

10.17. Na koliko se rastojanje može preneti električna energija od izvora elektromotorne sile od 5000 V, pomoću provodnika čija je specifična otpornost 1,75·10$^{-8}$ Ωm, površina poprečnog preseka 10$^{-6}$ m$^2$ da bi se u potrošaču čija je otpornost 1600 Ω razvila snaga od 10 kW. Unutrašnju otpornost izvora zanemariti.

✍

$$I=\frac{E}{R+R_p},P=I^2R,I=\sqrt{\frac{P}{R}};\ \frac{E}{R+R_p}=\sqrt{\frac{P}{R}},R_p=E\sqrt{\frac{R}{P}}-R=\rho\frac{l}{S}$$

$$l=\left(E\sqrt{\frac{R}{P}}-R\right)\frac{S}{\rho}=22{,}8\text{km }L=11{,}4\text{km}$$

10.18. Kroz bakarni provodnik, preseka $S$ = 1,5 mm$^2$, protiče struja stalnog intenziteta. Ako se u 1m$^3$ bakra nalazi $5\cdot10^{28}$ slobodnih elektrona i ako je njihova srednja brzina $1{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, odrediti jačinu električne struje.

✍ $I$ = 180 A

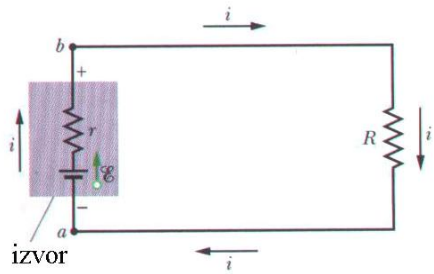
10.19. Kada se za polove strujnog izvora, elektromotorne sile $E$ = 50 V, priključi otpornik otpornosti $R_1$ = 20 Ω, kroz kolo protiče struja jačine $I_1$ = 2 A. Kolika je unutrašnja otpornost $r$ strujnog izvora? Koliki je intenzitet struje $I_2$ u kolu ako se za isti strujni izvor priključi otpornik otpornosti $R_2$ = 60 Ω?

✍ ($r$ = 5 Ω; $I_2$ = 0,77 A)

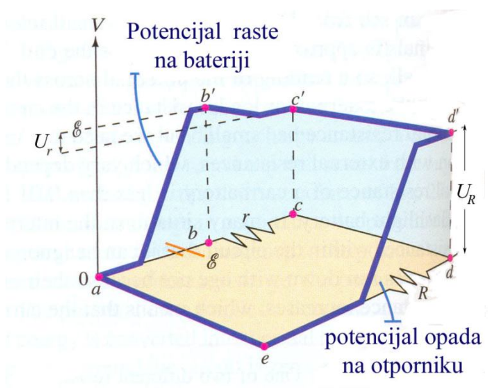
10.20. Na koju temperaturu treba zagrejati bakarnu žicu, početne temperature 0˚C, tako da se njena otpornost udvostruči? Termički koeficijent otpornosti bakra je $\alpha = 4{,}3\cdot10^{-3}\,\frac{1}{\text{K}}$.

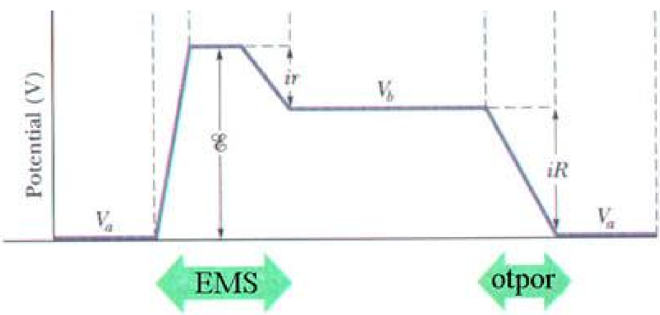
✍ ($t$ =233˚C )

10.21. Kakve vrednosti imaju potencijali za pojedine tačke u prikazanom kolu?




✍




## 11. Oscilacije Talasi Svetlost

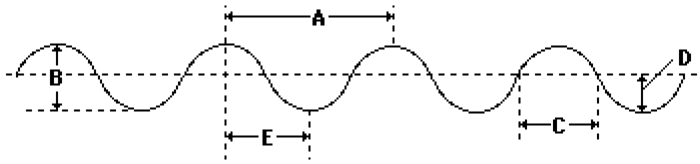
11.1. Telo harmonijski osciluje pri čemu svake minute napravi 180 oscilacija. Amplituda oscilovanja je 7 cm, a početna faza $\frac{3}{2}\pi$. Napisati jednačinu oscilovanja tela.

✍ $y = R\sin(\omega t + \varphi)$ $y = 7 \sin\left(6\pi \cdot t + \dfrac{3}{2}\pi\right)$ cm

11.2. Točak električne mašine za šivenje obrne se 920 puta u jednoj minuti. Za vreme jednog obrtaja točka igla izvrši jednu punu oscilaciju. Koliki je period obrtanja igle?

✍ $T$ = 0,06 s

11.3. Kojim slovom na slici je obeležena talasna dužina, a kojim amplituda?




✍ $\lambda$ = A; $x_0$ = D

11.4. Popuniti tabelu:

| **materijal** | **$\lambda$ [m]** | **$\nu$ [Hz]** | ***c*** |
|---|---|---|---|
| cink | 1,75 | 2,0 | ________ |
| bakar | 0,60 | 4,2 | ________ |

11.5. Harmonijski talas, talasne dužine 40 cm i frekvencije 8 Hz, prostire se duž *y*-ose. Odrediti: brzinu prostiranja, period i kružnu frekvenciju talasa.

✍ $T = 0{,}125$ s ; $\omega = 50{,}24 \ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, $c$ =3,2 ms$^{-1}$.

11.6. Izračunati brzinu ravnog elektromagnetnog talasa kroz staklo, relativne magnetne propustljivosti 1 i relativne dielektrične propustljivosti 6.

✍ $c = 1{,}22 \cdot 10^8 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

11.7. Elektromagnetni talasi šire se kroz vakuum brzinom $3 \cdot 10^8$ m/s. Vidljivi deo spektra se prostire od talasne dužine 400·nm (ljubičasto) do 700nm (crveno).

a) Odrediti frekvencije talasa navedenih talasnih dužina;

b) Radio talasi imaju frekvenciju od $550 \cdot 10^3$ Hz do $1600 \cdot 10^3$ Hz. Kolike su talasne dužine koje odgovaraju tim frekvencijama?

✍ a) $\nu_1 = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz ; $\nu_2 = 4{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz ; b) $\lambda_1 = 545$ m ; $\lambda_2 = 187{,}5$ m )

11.8. Zrak svetlosti pada na površinu, koja deli dve sredine, pod uglom od 30°. Indeks prelamanja prve sredine je $n_1$ = 2,4. Odrediti indeks prelamanja druge sredine, ako se zna da su odbijeni i prelomljeni zrak normalni jedan u odnosu na drugi.

✍ $$n_2 = n_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2{,}4 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}86} = 1{,}39$$

11.9. Predmet, veličine $P$ = 2 cm, postavi se na rastojanje $r_1$ = 5 cm, a zatim na rastojanje $r_2$ = 20 cm, od temena konkavnog sfernog ogledala, žižne daljine= 7,5 cm. Kakvi su likovi predmeta, gde se nalaze i kolika je njihova veličina u oba slučaja?

✍

$P$ = 2 cm

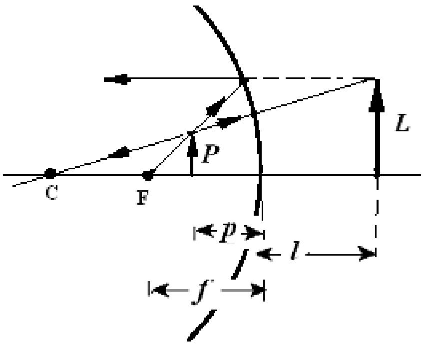
$r_1$ = 5 cm

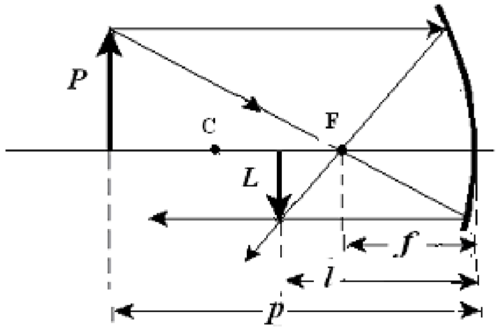
$r_2$ = 20 cm

$R$ = 15 cm

$l_1$ = ? $L_1$ = ?

$l_2$ = ? $L_2$ = ?




Predmet, na udaljenosti $r_1$ = 5 cm , nalazi se između žiže i temena ogledala, jer je $p_1 < f$. Tada se dobijaju uspravni, imaginarni i uvećani likovi, kao na slici. Jednačina ogledala u ovom slučaju glasi $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f_1}$ ,gde je $l_1$ jedina nepoznata, pa je $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{f_1}$, $\frac{1}{l_1} = \frac{f_1 - p_1}{f_1 p_1}$, $l_1 = \frac{f_1 p_1}{f_1 - p_1}$,

$l_1 = \frac{7{,}5 \cdot 5}{7{,}5 - 5}\,\text{cm} = 15\text{cm}$. Veličinu lika određujemo iz proporcije za uvećanje $U = \frac{L_1}{P} = \frac{l_1}{p_1}$ , odakle je $L_1 = \frac{l_1}{p_1} P = \frac{15}{5} \cdot 2\,\text{cm} = 6\,\text{cm}$, a uvećanje lika $U = \frac{L_1}{P} = \frac{6\text{cm}}{2\text{cm}} = 3$.

U drugom slučaju kada je lik realan, jednačina ogledala je $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}$, odakle je udaljenost lika $l_2$: $\frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}$, $\frac{1}{l_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{l_2} = \frac{p_2 - f}{f\ p_2}$, $l_2 = \frac{f \cdot p_2}{p_2 - f}$, $l_2 = \frac{7{,}5\text{cm} \cdot 20\text{cm}}{20\text{cm} - 7{,}5\text{cm}} = 12\text{cm}$.

Veličina lika određena je proporcijom $U = \frac{L_2}{P} = \frac{l_2}{p_2}$, $L_2 = \frac{l_2}{p_2} P = \frac{12\text{cm}}{20\text{cm}} \cdot 2\text{cm} = 1{,}2\text{cm}$ i

$U = \frac{L_2}{P} = \frac{1{,}2\text{cm}}{2\text{cm}} = 0{,}6$

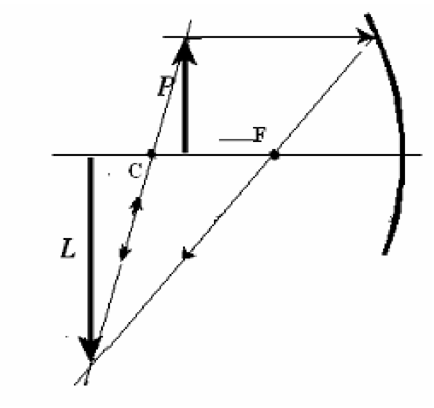
11.10. Žižna daljina konkavnog sfernog ogledala iznosi $f$ = 21 cm. Na koliko rastojanje $p$ od temena ogledala treba postaviti osvetljen predmet da bi daljina lika iznosila 3$p$?

✍ $f$ = 21 cm

$l = 3p$

$p$ =?

Za realan lik, jednačina konkavnog ogledala glasi: $\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$



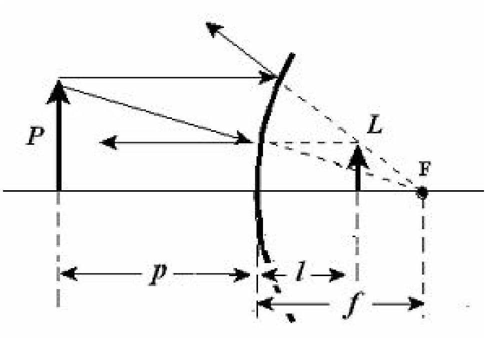

Imajući u vidu da je $l = 3p$, to je, $\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}=\frac{1}{f}$, pa je

$$\frac{3+1}{3p}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{4}{3p}=\frac{1}{f}$$

$$p=\frac{4}{3}f=\frac{4}{3}\cdot 21\,\text{cm}=28\,\text{cm}.$$

11.11. Lik koji formira ispupčeno sferno ogledalo tri puta je manji od predmeta. Žižna daljina ogledala iznosi $f = 24$ cm. Odrediti daljinu predmeta i daljinu lika.




Jednačina ispupčenog ogledala, za svako $p$ glasi:

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{l}=-\frac{1}{f},$$

a imajući u vidu da je $p = 3l$, to je

$$\frac{1}{3l}-\frac{1}{l}=-\frac{1}{f},\quad \frac{2}{3l}=\frac{1}{f}\quad l=\frac{2}{3}f=\frac{2}{3}\cdot 24\text{cm}=16\text{ cm},$$

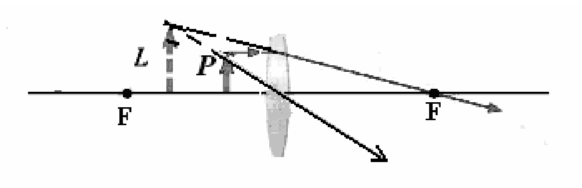
$p = 3\cdot l = 3\cdot 16$ cm = 48 cm.

11.12. Predmet, veličine $P = 1$ cm, postavljen je na udaljenosti $p = f/4$ od sabirnog sočiva. Konstruisati lik i navesti njegove karakteristike.

✍
$$\frac{1}{p}-\frac{1}{l}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{p}-\frac{1}{f}$$

$$l=\frac{p\cdot f}{f-p}=\frac{\frac{f}{4}\cdot f}{f-\frac{f}{4}}=\frac{f}{3}$$




Dobijeni lik je imaginaran, uvećan i uspravan

11.13. Na udaljenosti $p = 5$ cm od rasipnog sočiva, optičke moći $D = 5$ dioptrija, nalazi se predmet. Gde se nalazi lik ovog predmeta? Konstruisati i navesti kakav je lik.

✍
$p = 5$ cm = $5\cdot 10^{-2}$ m

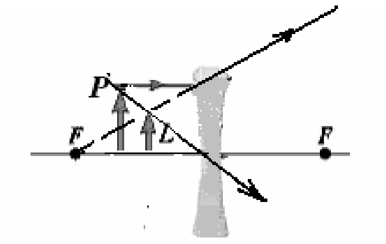
$D$ =5dioptrija

$l = ?$

$U = ?$

Rasipna sočiva daju nerealne likove, za svaki položaj predmeta $p$ čija jednačina je oblika

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{p}-\frac{1}{l}.$$




Dobijeni lik je nerealan, uspravan i umanjen

Kako je $D = \frac{1}{f}$, to je

$$-D = \frac{1}{p} - \frac{1}{l},$$

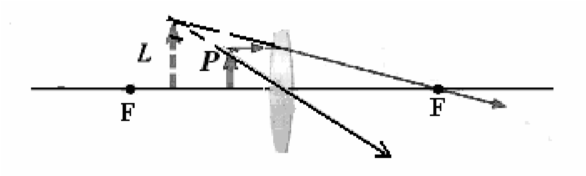
odakle udaljenost lika do sočiva iznosi:

$$l = \frac{p}{1 + Dp} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{1 + 5 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}\,\text{m} = 4\text{cm}$$

Uvećanje sočiva iznosi:

$$U = \frac{l}{p} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

11.14. Kada posmatramo predmet kroz lupu, žižne daljine $f$ = 6 cm, vidimo njegov lik jasno i oštro na daljini jasnog vida $s$ = 25 cm. Koliko je udaljen posmatrani predmet od optičkog centra lupe? Odrediti uvećanje lupe?




✍

Lupa je tanko sabirno sočivo male žižne daljine. Predmet koji se posmatra pomoću lupe postavlja se između sočiva i njegove žiže. Tad je dobijeni lik uspravan, imaginaran i uvećan. Na osnovu jednačine lupe, dobijamo položaj predmeta $p$. $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, $p = \frac{s \cdot f}{s + f} \approx 4{,}84$ cm.

Uvećanje lupe računa se pomoću izraza $U = 1 + \frac{s}{f} = 5$.

11.15. Predmet veličine $P$ = 4 cm, postavljen je ispred ispupčenog sfernog ogledala, žižne daljine $f$ = 20 cm. Veličina lika koji formira ogledalo iznosi $L$ = 2 cm. Odrediti rastojanje između predmeta i lika.

✍ $d$ = 30 cm

11.16. Na udaljenosti $p$ = 5 cm od sabirnog sočiva žižne daljine $f$ = 0,2 m, nalazi se predmet. Gde se nalazi lik ovog predmeta? Konstruisati lik i navesti njegove karakteristike. Odrediti uvećanje i optičku moć sočiva.

✍ $l$ = 6,7 cm ; $U$ = 1,3; $D$ = 5 dioptrija

11.17. Odrediti optičku moć sočiva, čije su žižne daljine $f_1$ = 2 m, $f_2$ = 80 mm , $f_3$= 20 mm, $f_4$= -0,4 m i $f_5$ = -8 cm.

✍ 0,5 dioptrija; 12,5 dioptrija; 50 dioptrija; - 2,5 dioptrija; -12,5 dioptrija

# 12. Struktura materije

12.1 Kinetička energija fotoelektrona emitovanog sa površine cezijuma je 2 eV. Naći talasnu dužinu svetlosti koja je izazvala fotoefekat ako je izlazni rad za cezijum 1,8 eV.

✍ Iz $h\nu = A + E_k$ i $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ je $\lambda = \dfrac{hc}{A + E_k}$. 1eV=1,6·10^-19^J.

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3.8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \text{m} = 327\text{nm}$$

**Fotoefekat je bio potvrda činjenice da svetlost ima dualističku prirodu, talasnu i čestičnu. Pri interakciji svetlosti sa materijom, svetlost se ponaša kao da je sastavljena iz čestica koje imaju energiju $E = h\nu$ i količinu kretanja $p = \dfrac{h}{\lambda}$. Isto važi za čestice, elektrone, neutrone i druge. De Brolj je otkrio da čestice, koje imaju količinu kretanja *p = mv,* imaju talasnu dužinu $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$.**

12.2. Naći impuls fotona talasne dužine 16 nm.

✍. $p = \dfrac{h}{\lambda} = 4{,}1 \cdot 10^{-26}$ kgm/s

12.3. Naći impuls i talasnu dužinu fotona energije 1 eV.

✍ $p = \dfrac{E}{c} = 5.31 \cdot 10^{-28}$ kgm/s , $\lambda = 1{,}25$ m

12.4. Kolikom brzinom treba da se kreće elektron da bi njegov impuls bio jednak impulsu fotona talasne dužine 520 m?

✍ $v = \dfrac{h}{m\lambda} = 1{,}4 \cdot 10^{3}$ m/s

12.5. Kolika je talasna dužina fotona čiji je impuls jednak impulsu elektrona koji je preleteo potencijalnu razliku 4,9 V? Početna brzina elektrona je bila nula.

✍ $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}} = 5{,}5 \cdot 10^{-10}$ m

12.6. Naći energiju koju treba predati vodonikovom atomu u prvom pobuđenom stanju da bi došlo do njegove jonizacije.

✍ $E_{jon} = E_\infty - E_n$; $E_\infty = 0$; $E_{jon} = -E_n$; $n = 2$; $E_{jon} = \dfrac{1}{4}13{,}6$ eV $= 3{,}4$ eV

12.7. Vodonikov atom u osnovnom stanju apsorbuje foton energije 16 eV i jonizuje se. Naći kinetičku energiju i talasnu dužinu izbačenog elektrona.

✍ Iz zakona održanja energije $h\nu = E_{jon} + E_k$. Kinetička energija izbačenog elektrona je $E_k = h\nu - E_{jon}$=2,4 eV. Talasna dužina elektrona (debroljevska talasna dužina) je

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = 7{,}9 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

12.8. Koliku talasnu dužinu treba da ima foton da bi jonizovao helijumov atom iz osnovnog stanja?

✍ $\lambda = \dfrac{hc}{Z^2 13{,}6\ \mathrm{eV}} = 22{,}8\ \mathrm{nm}$

12.9. Koliko ima protona a koliko neutrona u jezgru ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$?

✍ Redni broj $Z$ je broj protona a broj neutrona je $N = A - Z = 235 - 92 = 143$

12.10. Koliko ima protona, koliko neutrona i koliko elektrona u masi od 1g ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$?

✍ U $m = 1$ g nalazi se $N = \dfrac{mN_A}{M}$ atoma. Za $M = 4$g/mol, $N = 1{,}5\cdot 10^{23}$ atoma.